- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

Kapitel 3 Mathematik

Arithmetik und Algebra Grundlagen

Verfasser:

Hans-Rudolf Niederberger Elektroingenieur FH/HTL Vordergut 1, 8772 Nidfurn 055 - 654 12 87

Ausgabe:

Februar 2009

- 3 **MATHEMATIK**
- ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

Inhaltsverzeichnis 3 Mathematik

3.1.19

3.1.20

3.1.21

3.1		etik und Algebra Grundlagen
	3.1.1	Vorwort
	3.1.2	Grundlagen der Zahlen
	3.1.3	Zahlenstrahl, Zahlengerade
	3.1.4	Massvorsätze
	3.1.5	Das griechische Alphabet
	3.1.6	Prozente und Promille
	3.1.7	Mathematische Zeichen
	3.1.8	Das Einmal-Eins der Zahlen
	3.1.9	Lampeneinteilung in einem Raum
	3.1.10	Umrechnung der Längen, Flächen und Volumenmasse
	3.1.11	Natürliche Zahlen und Bruchzahlen
	3.1.12	Zahlengrössen
	3.1.13	Symbole für Zahlen
	3.1.14	Grafische Darstellungen
	3.1.15	Mittelwerte
	3.1.16	Proportionen und Verhältnisse
	3.1.17	Absoluter Betrag
	3.1.18	Zahlenbereiche

Rechnen mit dem Taschenrechner

Römische Ziffern

Umrechnung Dezimal- in Dualsystem

BiVo

Probleme umfassend bearbeiten Verstehen und anwenden

TD Technische Dokumentation

BET Bearbeitungstechnik

TG Technologische Grundlagen

3.1.1 Arithmetische Operationen

- Operationen mit bestimmten und allgemeinen
- Berechnungen mit Zehnerpotenzen
- Umrechnungen von Grössenordnungen mit Massvorsätzen

3.1.1 Logische Operationen

- Duales Zahlensystem
- Wahrheitstabelle
- Grundoperationen der Logik:
- AND, OR, NOT

3.1.1 Algebraische Gleichungen

- Gleichungen 1. Grades und rein quadratische Gleichungen Gleichungen 2. Grades mit Bezug zu den
- Fächern dieses Lehrplans

3.1.2 Geometrische Grössen

- Länge, Fläche, Volumen
- Seiten im rechtwinkligen Dreieck
- (Pythagoras) Trigonometrische Funktionen
- Sinus, Cosinus, Tangens (0-90 °)
 Darstellung der Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion im Einheitskreis und als Liniendingenstunktion im Einheitskreis und als Liniendingenstunktion in Einheitskreis und als Liniendingenstunktion in Einheitskreis und als Liniendingenstunktion in Einheitskreis und als Einheitskreis und als Einheitskreis und als Einheitskreis und als Einheitskreis und Einheitskreis un diagramm

3.1.2 Grafische Darstellungen

- Diagrammarten
- Darstellungen im rechtwinkligen Koordinaten-system mit linearen und nichtlinearen Mass-

3.1.2 Grafische Darstellungen

- Strecke, Pfeil als Mass einer Grösse (Vektor)
- Addition und Subtraktion mit zwei Grössen
- Addition und Subtraktion mit mehreren Grös-

EST Elektrische Systemtechnik

KOM Kommunikationstechnik

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1 Arithmetik und Algebra Grundlagen

3.1.1 Vorwort

Die Mathematik besteht aus Teilgebieten. Die drei wichtigsten sind:

1.	Arithmetik (Lehre von den Zahlengrössen)
2.	Algebra (Lehre von den Gleichungen)
3.	Geometrie (Lehre von den Raumgrössen)

Unser heutiges technisches Zeitalter wäre ohne die Mathematik nicht denkbar, deshalb ist sie die Grundlage für alle technischen Berufe. Die Lehre von den Zahlengrössen (Arithmetik) gliedert sich in:

- 1. das Rechnen mit bestimmten Zahlen, die im allgemeinen durch die arabischen Ziffern dargestellt werden (1; 2; 3; 4;)
- 2. das Rechnen mit Variablen, die üblicherweise durch Buchstaben dargestellt werden (a; b; c; ...)

Die Lehre von den Raumgrössen gliedert sich in:

Die Lehre von den ebenen Flächen (Planimetrie)
 Die Lehre von den Körpern (Stereometrie)
 Die Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken (Trigonometrie)

Die Grundlage dieses Gebäudes ist die menschliche Vernunft; das heisst, die Mathematik baut auf Grundsätzen (Axiome) auf, die beweislos vorausgesetzt werden. Einige lauten:

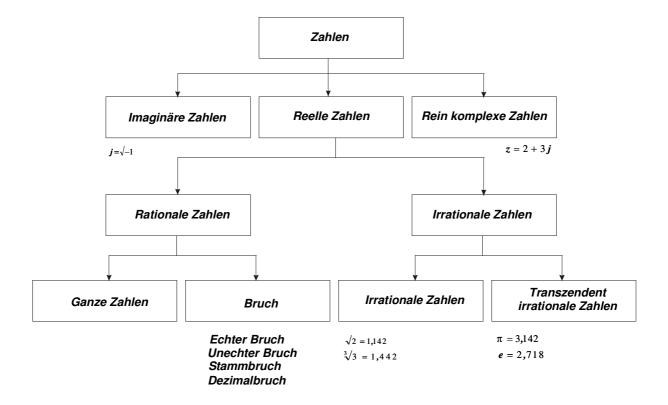
- 1. Jede Grösse ist sich selbst gleich.
- 2. Werden gleiche Grössen gleich behandelt, so ergeben sich gleiche Grössen.
- 3. Sind zwei Grössen einer dritten gleich, so sind sie auch untereinander gleich.

Alle anderen mathematischen Aussagen (Lehrsätze) müssen bewiesen werden, d.h. man muss sie auf bekannte Lehrsätze oder Grundsätze zurückführen.

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.2 Grundlagen der Zahlen

Zahlen werden in der Mathematik folgendermassen eingeteilt.



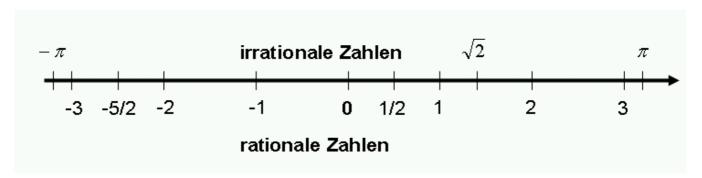
- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.3 Zahlenstrahl, Zahlengerade

Unter Zahlengerade versteht man in der Mathematik die Veranschaulichung der reellen Zahlen als Punkte auf einer Geraden.

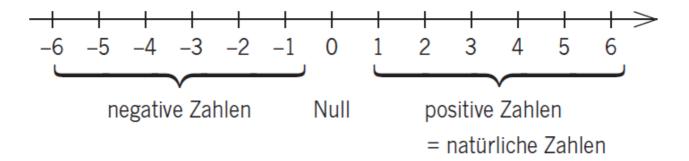
Im Bild wurden die Orte der Punkte der ganzen Zahlen durch senkrechte Striche hervorgehoben.

Die Zahlengerade ist eine Veranschaulichung des eindimensionalen euklidischen Vektorraums \mathbb{R}^1 . Die Darstellung verdeutlicht, dass die Menge der reellen Zahlen \mathfrak{R} eine geordnete Menge ist. Die Zahlengerade setzt sich in beide Richtungen bis ins Unendliche fort. Der Pfeil an der rechten Seite der Darstellung gibt an, dass die Zahlen in dieser Richtung größer werden.



Ganze Zahlen

Die Summe der ganzen Zahlen ist nachfolgend dargestellt.



- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.4 Massvorsätze

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden folgende Vielfache und Bruchteile von Dekaden verwendet.

Vorsatz	Vorsatz- zeichen	Zehner- potenz	Vorsatz	Vorsatz- zeichen	Zehner- potenz
Tera	T	10 ¹²	Dezi	d	10 ⁻¹
Giga	G	10 ⁹	Zenti	С	10 ⁻²
Mega	M	10 ⁶	Milli	m	10 ⁻³
Kilo	k	10 ³	Mikro	μ	10 ⁻⁶
Hekto	h	10 ²	Nano	n	10 ⁻⁹
Deka	da	10 ¹	Piko	р	10 ⁻⁹ 10 ⁻¹² 10 ⁻¹⁵
			Femto	f	10 ⁻¹⁵

3.1.4.1 Abgeänderte Basis-Einheiten

Ausser den unter den Basisgrössen aufgeführten Einheiten sind auch weitere - verkleinerte oder vergrösserte - Einheiten gesetzlich erlaubt.

Längen	<u>[m]</u>	μm, mm, cm, dm, km
Zeit	[s]	ms, min., Std=h, Tg=d, Jahr=a
Strom	[A]	μA, mA, kA
Gewicht	[kg]	g, mg, t

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.5 Das griechische Alphabet

Das griechische Alphabet umfasst 24 Buchstaben.

Grossbuch- staben		Kleinbuch- staben	Translite- ration	Name
1.	A	α	а	Alpha
2.	В	β	b	Beta
3.	Γ	γ	g	Gamma
4.	Δ	δ	d	Delta
5.	E	ε	е	Epsilon
6.	Z	ζ	Z	Zeta
7.	Н	η	ë (gespr. Ä)	Eta
8.	Θ	ϑ	th	Theta
9.	I	ι	i	lota
10.	K	κ	k	Kappa
11.	Λ	λ	I	Lambda
12.	M	μ	m	My
13.	N	ν	n	Ny
14.	[X]	ξ	X	Xi
15.	O	0	0	Omikron
16.	П	π	р	Pi
17.	P	ρ	r	Rho
18.	\sum	σ	S	Sigma
19.	T	τ	t	Tau
20.	Y	υ	y (gespr. ü)	Ypsilon
21.	φ	φ	ph (gespr. f)	Phi
22.	X	χ	ch	Chi
23.	Ψ	Ψ	ps	Psi
24.	Ω	ω	Õ	Omega

Geschichte unserer Buchstaben

Das lateinische Alphabet wurde, über Vermittlung der Etrusker, aus dem westgriechischen Alphabet entlehnt. Das archaische lateinische Alphabet bestand aus 21 Buchstaben: A B C D E F Z H I K L M N O P Q R S T V X. Im deutschen Alphabet kommen noch die Buchstaben Ä ä, Ö ö und Ü ü sowie – außer in der Schweiz und Liechtenstein – der Kleinbuchstabe β hinzu.

In zahlreichen Sprachen wurde das lateinische Alphabet um diakritische Zeichen ergänzt (z. B. å, é, ï, ò, û), um weitere sprachspezifische Laute darstellen zu können.

Der Buchstabe A ist der erste Buchstabe des Alphabets. Bei den Griechen hieß dieser Buchstabe "Alpha". Der zweite Buchstabe des Alphabets hieß "Beta". Aus diesen beiden Buchstabennamen ist das Wort "Alphabet" zusammengesetzt.

Das moderne lateinische Alphabet enthält 26 Zeichen. Diese sind (in Großbuchstaben): A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z; Und in Kleinbuchstaben: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, I, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z;

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.6 Prozente und Promille

Prozentwert

Der Prozentwert wird immer als Faktor vom Ganzen (100%) berechnet.

$$W = G \cdot \frac{w_{\%}}{100\%}$$

$$w_{\%} = \frac{W}{G} \cdot 100\%$$

Differenzwert

$$\Delta w = \frac{W - G}{G}$$

$$\Delta w_{\%} = \frac{W - G}{G} \cdot 100\%$$

Achtung

Negativer Endwert bedeutet eine Abnahme gegenüber dem Grundwert.

Positiver Endwert entsteht bei einer Zunahme des Grundwertes (Beispiele: Leistungszunahme, Spannungszunahme und Temperaturzunahme). G GrundwertG ist der angenommene100%-Wert

W Wert der mit dem Grundwert verglichen wird.
Wieviel in absolutem Betrag ist dieser Wert vom Grundwert

 $_{W_{\%}}$ Prozentsatz

[%]

 $P_{\%}$ Promillsatz

[‰]

Δw Differenzwert
Wieviel in relativem
Betrag ist dieser Wert
vom 100%-Wert

 $\Delta w_{\%}$ Prozentsatz der

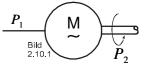
Differenz [%]

Praxisbeispiele

Beispiel 1

"Wirkungsgrad - Motorleistung"

$$P_V = P_1 - P_2$$



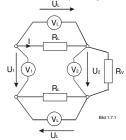
$$\eta_{\%} = \frac{P_{Ab}}{P_{Auf}} \cdot 100\%$$

"Differenzwert -Leistung"

$$\Delta P_{\%} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \cdot 100\%$$

Beispiel 2

"Differenzwert - Spannungsabfall"



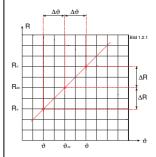
$$\Delta u_{\%} = \frac{U_1 - U_2}{U_1} \cdot 100\%$$

Beispiel 3

"Differenzwert -Temperatur"

$$\Delta \vartheta_{\%} = \frac{\vartheta - \vartheta_{20}}{\vartheta_{20}} \cdot 100\%$$

$$\Delta \vartheta = \vartheta - 20^{\circ} C$$



 P_1 Anfangsleistung [W]

P₂ Endleistung [W]

 $P_{\scriptscriptstyle V}$ Leistungsverluste [W]

 $U_{\scriptscriptstyle 1}$ Anfangsspannung ${\it [V]}$

 U_2 Endspannung [V]

 Δu Spannungsabfall [V]

 ϑ_1 Anfangstemperatur [°C]

 ϑ_2 Endtemperatur [°C]

 $\Delta artheta$ Temperaturdifferenz [°C]

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.7 Mathematische Zeichen

(nach DIN 1302)

	Beschreibung	Beispiel
+	plus, und	3 + 4 = 7
-	minus, weniger	5-3=2
х.	mal, multipliziert	2.6=12
-:/	geteilt durch, dividiert	$\frac{12}{3} = 4$
=	gleich	11=3+8
=	identisch gleich	5 ≡ 5
≠	ungleich, nicht gleich	5 ≠ 7
≈	nahezu gleich, rund, etwa	$\frac{1}{3}\approx 0.333$
∞	unendlich	$\frac{1}{0} = \infty$
<	kleiner als	5 < 8
<u>≤</u>	kleiner als oder gleich	a ≤ b
>	grösser als	7 > 1
	absoluter Betrag	7
<u></u>	entspricht	1cm
	Wurzel aus	$\sqrt{9}=3$
Σ	Summe	$\sum_{i=1}^{4} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
_		

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.8 Das Einmal-Eins der Zahlen

Das Kleine Einmaleins (auch 1×1 oder 1mal1) ist eine Zusammenstellung aller Produkte, die sich aus der Kombination zweier natürlicher Zahlen von 1 bis 10 ergeben, meist in Tabellenform. Das Große Einmaleins ist die Erweiterung auf natürliche Zahlen von 1 bis 20. Das Kleine Einmaleins gehört zum arithmetischen Grundwissen der Mathematik und wird meist in der Grundschule auswendig gelernt.

Als Einmaleins werden metaphorisch auch Grundkenntnisse eines Wissensgebiets oder einer Fertigkeit bezeichnet.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4				22						
5										F-1
6										
7										
8										
9										
10										

Alter Spruch: Nach Adam Rise gibt das ...

		~		101			
m	ıl ij	τ.	mal	ift	mal	- 8	ft
1	I	1 2	8	16		5	2
1	2	2 2	9	18	5	6	30
1	3	3 -	2	9	5	78	3
1	4	4 3	3	12	5		4
1	3 4 5 6	3 4 5 6 3	4		5	9	4
1		6 3	3 4 5 6	15	6	6	2
I	7	7 3		21	6		4
I			7 8		6	78	4
1	9	9 3	9	27	6	9	3 4 4 3 4 4 5 5
2	2	4 4	-		7	78	4:
2	3	6 4		20	7		5
2		8 4			7	9	6
2	5	10 4			3	8	6.
2	6	12 4	7	32	8	9	7
2	7	14 4	9		2	9	8

Won Multiplicirn auff Linien.

Bum multipliciren gehören zwo zahlen/ eine ble multiplicire wirdt die ander / dadurch man multiplicire. Die multiplicire foll werden/ jot die aufflegen/ die ander für dich schreiben / zu oberst anheben. Ligt ein psenning in einem spacio / lo greisf aust die ziehen daufflegen die die siehen zwie die die siehen zwie zu die ziehen ziehen zu die ziehen ziehen ziehen ziehen zu die ziehen z

Abam Nifen.

teg allda die meiste figur halb/Als dann greiff herab/leg die erste figur auch halb/vinnd heb den pfenning im spacio ausst. Defgleichen soman mit drepen/vieren oder

Abfgleichen somm mir dreientriefern oder mehr figuren multipliciten wil/soll man viber so biel kinten greisfen/wind von oben herad legen/Baumaber de, auff den kinten ligen/So greisf auff die oberst kinten/multiplicitsfu mit einer figur/ so best fill baten/ leg die singessektieten jahl allda so oft als de, auff der kinten ligen.

Adam Ries

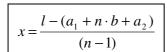
* 1492 in Staffelstein

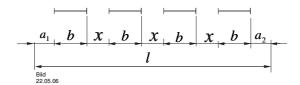
† 30. März 1559

Adam Ries gilt allgemein als der "Vater des modernen Rechnens". Er hat mit seinen Werken entscheidend dazu beigetragen, dass die römische Zahlendarstellung als in der Praxis unhandlich erkannt und weitgehend durch die nach dem Stellenwertsystem strukturierten indisch-arabischen Zahlzeichen ersetzt wurde.

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.9 Lampeneinteilung in einem Raum





Bei allen eingesetzten Einheiten ist auf die Gleichheit zu achten.

[*m*]

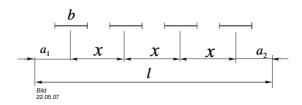
[dm]

[*cm*]

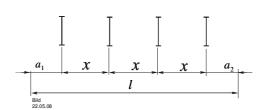
[mm]

Einheitenumrechnung siehe Seite 304.

$$x = \frac{l - (a_1 + a_2)}{(n - 1)}$$



$$l = a_1 + (n-1) \cdot x + a_2$$



- x Lampenabstand [m]
- b Lampenlänge [m]
- a_1 Wandabstand links [m]
- a_1 Wandabstand rechts [m]
- *i* Anzahl Lampen [-]

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.10 Umrechnung der Längen, Flächen und Volumenmasse

	Länge	Fläche	Volumen
	*	*	*
Exponent	1	2	3
mm*			
	10^{1}	10^{2}	10^{3}
cm*			
	10^{1}	10^{2}	10^{3}
dm*			
	10^{1}	10^{2}	10^{3}
<i>m</i> *			
	10^{3}	10^{6}	10 ⁹
km*			

Rechnet man von einem kleineren Mass zu einem grösseren Mass, so muss mit dem Faktor in der Tabelle dividiert werden.

Rechnet man von einem grösseren Mass zu einem kleineren Mass, so muss mit dem Faktor in der Tabelle multipliziert werden.

$$\frac{100 \, mm}{Teiler} = \frac{? \, m}{1000}$$

$$\frac{1 \, dm^3}{1000} = 0,1m$$

$$\frac{1 \, dm^3}{1000} = 0,1m$$

$$\frac{1 \, dm^3}{1000} = 1000 \, cm^3$$

Zwischen mm und m sind $10^1 \cdot 10^1 \cdot 10^1$ Teile. Dies entspricht einem Teiler von $10^3 = 1000$.

Zwischen dm^3 und cm^3 sind 10^3 Teile. Dies entspricht dem Faktor 1000.

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.11 Natürliche Zahlen und Bruchzahlen

Geschichte unserer Ziffern

Der deutsche Gelehrte Gerbert de Aurillac (945 geboren) rechnet als erster mit arabischen Ziffern, die er in der spanischen Grenzmark kennengelernt hat – also mit den Zahlen "Westarabiens". Diese fanden sehr schnell Eingang in die europäischen Gelehrtenstuben – die Null wurde erst im 12. Jahrhundert in die westliche Mathematik eingeführt ("Null" oder "leer" ist die arabische Übersetzung des (indischen) Sanskritwortes sunya , welches die gleiche Bedeutung hat).

Kurz nach der Übernahme durch Gerbert "starb" die westarabische Schreibweise der Ziffer aus und wir sind auf der ostarabischen Schreibweise der Ziffern "sitzengeblieben".

Die Synthese griechischer und indischer Wissenschaft (mit babylonischen Erkenntnissen gewürzt) legte den Grundstein der arabischen Gelehrsamkeit und Wissenschaft, die in der Zeit vom 8. bis zum 12. Jahrhundert die glänzenste Periode erlebte.



Das arabische Reich teilte sich im 13. Jahrhundert in zwei Teile
– der ostarabische Teil mit seinem Zentrum Bagdad und Damaskus und der westarabische Teil mit seinem kulturellem Zentrum in Cordova.

So nahmen auch die Zahlen zwei unterschiedliche Entwicklungen. Die westarabische Ausprägung und die ostarabische Ausprägung.

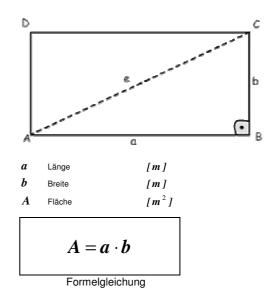
3.1.12 Zahlengrössen

3.1.13 Symbole für Zahlen

Um den Flächeninhalt eines Rechtecks zu berechnen, werden immer Länge und Breite miteinander multipliziert. Diese Gesetzmässigkeit kann man auch durch Symbole, z.B. Buchstaben, ausdrücken:

Fläche = Länge · Breite

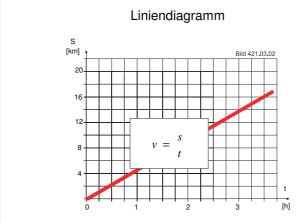
Berechnung in Worten.



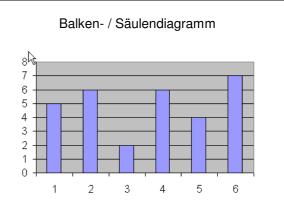
- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.14 Grafische Darstellungen

Die Basis aller grafischen Darstellungen ist die Wertetabelle. Aus der Wertetabelle wird anschliessend ein Diagramm erstellt. Die drei wichtigsten Diagrammtypen sind nachfolgend anhand je eines Beispiels dargestellt.



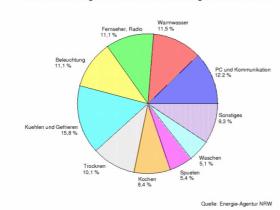
Durch Liniendiagramme können Funktionen und Messungen veranschaulicht werden.



Ein Säulendiagramm (vertikal) oder ein Balkendiagramm (horizontal) wird meistens für einfache Vergleiche verwendet.

Tortendiagramm

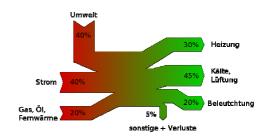
Elektrischer Energieverbrauch von Haushaltsgeraeten in Prozent



Tortendiagramme dienen zum Aufzeigen der prozentualen Verteilung ausgehend vom Grundwert (100%).

Sankey-Diagramm

Ein Sankey-Diagramm ist eine graphische Darstellung von Mengenflüssen. Anders als beim Flussdiagramm werden die Mengen durch mengenproportional dicke Pfeile dargestellt. Sankey-Diagramme sind wichtige Hilfsmittel zur Visualisierung von Energie- und Materialflüssen sowie von Ineffizienzen und Einsparpotenzialen im Umgang mit Ressourcen.



Energiekonzept für ein Gebäude

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.15 Mittelwerte

3.1.15.1 Arithmetische Mittelwert

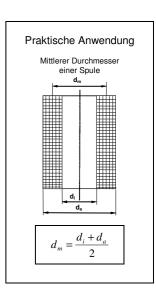
Merke:

Das arithmetische Mittel einer Anzahl von Grössen ist der Quotient aus ihren Summen und ihrer Anzahl.

$$m_a = \frac{a+b}{2}$$

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots \cdot a_n}{n}$$

Arithmetrisches Mittel



3.1.15.2 Geometrische Mittelwert

Merke:

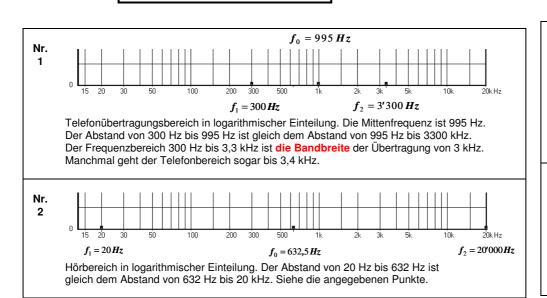
Das geometrische Mittel von n Zahlen ist die n-te

Wurzel aus dem Produkten der n Zahlen.

$$m_g = \sqrt[2]{g_1 \cdot g_2}$$

$$m_g = \sqrt[n]{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot \dots \cdot g_n}$$

Geometrisches Mittel



Praktische Anwendung

Als Beispiel wurden hier die Grenzfrequenzen einer Telefonübertragung vorgegeben: f₁ = 300 Hz und f₂= 3300 Hz, wobei die richtige Mittenfrequenz f₀ = 995 Hz als geometrisches Mittel ist und nicht die 1800 Hz der Berechnung des arithmetischen Mittels. Was für ein Unterschied!

Praktische Anwendung Nr. 2

Der Hi-Fi-Hörbereich ist von $f_1=20$ Hz und $f_2=20000$ Hz angegeben, wobei die richtige Mittenfrequenz $f_0=632,5$ Hz - als geometrisches Mittel ist und nicht die 10,010 kHz aus der Berechnung des arithmetischen Mittels. Dieses ist häufig nicht klar!

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.15.3 Quadratische Mittelwert

Merke:

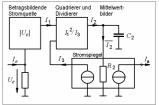
Das quadratische Mittel von n Zahlen ist die Wurzel aus Wurzel aus der Summe der n Quadratzahlen dividiert duch die Anzahl der Quadratzahlen.

$$m_q = \sqrt[2]{\frac{{g_1}^2 + {g_2}^2}{2}}$$

$$m_g = \sqrt[2]{\frac{{g_1}^2 + {g_2}^2 + {g_3}^2 + \dots + {g_n}^2}{n}}$$

Praktische Anwendung Nr. 1

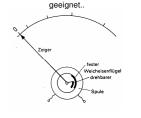
Da in der Elektrotechnik bzw. Elektronik die Spannungsverläufe häufig stark vom Sinusverlauf abweichen, können hiermit erheblich falsche Messwerte entstehen. Messgeräte, die den Effektivwert tatsächlich gemäß seiner Definition bstimmen, werden Echteffektivwert-Messgeräte genannt und mit der Bezeichnung True RMS bzw. TRMS ausgewiesen (RMS = root mean square = Wurzel aus dem Mittelwert des Quadrats)



Elektronische Schaltung zur Echt-Effektivwertbildung

Praktische Anwendung Nr. 2

Elektromechanische Dreheisenmessgeräte arbeiten "TRMS"-bildend und zeigen daher unabhängig vom zeitlichen Verlauf den Effektivwert an. Auch sie sind nur für einen begrenzten Frequenzbereich



3.1.15.4 Harmonische Mittelwert

Merke:

Das harmonische Mittel von n Zahlen ist der Quotient aus der Anzahl harmonischer Zahlen dividiert duchdie Summe ihrer Bruchzahlen.

$$m_{h} = \frac{2}{\frac{1}{g_{1}} + \frac{1}{g_{2}}}$$

$$m_{h} = \frac{n}{\frac{1}{g_{1}} + \frac{1}{g_{2}} + \frac{1}{g_{2}} + \dots + \frac{1}{g_{n}}}$$

Harmonisches Mittel

Quadratisches Mittel

Kehrwert des arithmetischen Mittel

Praktische Anwendung Nr. 1

Allgemein gilt: Benötigt man für die Teilstrecke g tdie Zeit f 1 (also Durchschnittsgeschwindigkeit t 1 = s 1/ t 1) und für die Teilstrecke s 20ie Zeit t 2 (also Durchschnittsgeschwindigkeit v 2 = s 2/ t 2), so gilt für die Durchschnittsgeschwindigkeit über die gesamte Strecke

$$v = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} = \frac{t_1 v_1 + t_2 v_2}{t_1 + t_2}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist also das mit den Wegstrecken gewichtete harmonische Mittel der Teilgeschwindigkeiten oder das mit der benötigten Zeit gewichtete arithmetische Mittel der Teilgeschwindigkeiten.

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.16 Proportionen und Verhältnisse

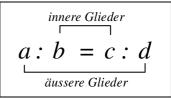
Grössenvergleiche können durch Verhältnisse beschrieben werden. Das Verhätnis von a zu b ist der Quotient a: b. Man liesst "a verhält sich zu b" oder "a zu b".

Verhältnissgleichung

Wenn die Verhätnisse a:b und c:d den gleichen Wert

haben, können sie gleichgesetzt werden.

Verhältnisse → Verhältnissgleichung



1:2=4:8

Produktegleichung

Das Produkt der äusseren Glieder einer Proportion

ist gleich dem Produkt der innenren Glieder.

$$a \cdot d = b \cdot c$$

1:8=2:4

Proportion → **Produktegleichnung**

Das Verhältnis a:b werden wir meist als Bruch $\frac{a}{b}$ schreiben und durch Erweitern und/oder Kürzen vereinfachen. Verhältnisse, die aus mehreren Zahlen oder Grössen gebildet werden, kann man eben falls vereinfachen.

Bein Vergleich von Grössen können folgende Aussagen gemacht werden:

 \boldsymbol{a}

1

Die Strecke a ist 20mm lang.

Die Strecke b ist 30mm lang.

a ist um 10mm kürzer als b.

b ist um 10mm länger als a.

a ist um ein Drittel kürzer als b .

b ist um die Hälfte länger als a.

a ist $\frac{2}{3}$ -mal so gross wie b.

b ist $1\frac{1}{2}$ -mal so gross wie a.

a verhält sich zu b wie 2:3.

b verhält sich zu a wie 3:2.

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.17 Absoluter Betrag

Unter dem absoluten Betrag einer Zahl a versteht man ihren Wert ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, geschrieben |a|.

3.1.17.1 Rechenregeln

a)
$$|a \pm b| \le |a| + |b|$$

b)
$$|a \pm b| \ge ||a| - |b||$$

c)
$$|a| - |b| \le ||a| - |b||$$

$$||a| - |b|| \le |a \pm b|$$

$$|a \pm b| \le |a| + |b|$$

$$d) |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

e)
$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

- **MATHEMATIK**
- ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.18 Zahlenbereiche

Inverse Elemente:

Zur rationalen Zahl a ist - a das inverse Element bezüglich der Addition (Gegenzahl) und das inverse Element bezüglich der Multiplikation (Kehrwert). Die Null hat kein Inverses bezüglich der Multiplikation: Die Division durch Null ist nicht erlaubt! Die Verknüpfung mit dem Inversen ergibt stets das neutrale Element.

$$a + (-a) = 0 a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

1.
$$5\frac{5}{6} + (-5\frac{5}{6}) = 5\frac{5}{6} - 5\frac{5}{6} = 0$$
 2. $(-\frac{5}{6}) \cdot (-\frac{6}{5}) = 1$ 3. $5.6 \cdot \frac{5}{28} = \frac{5}{28} \cdot 5.6 = 1$ 4. $-4.9 + (+4.9) = 0$

2.
$$(-\frac{5}{6}) \cdot (-\frac{6}{6}) = 1$$

3.
$$5.6 \cdot \frac{5}{50} = \frac{5}{50} \cdot 5.6 = 1$$

$$4. -4.9 + (+4.9) = 0$$

Ähnlich wie bei ganzen Zahlen (s. S. 52) definiert man den Betrag |a | der rationalen Zahl a.

Der absolute Betrag (kurz: Betrag) | a | einer rationalen Zahl a wird wie folgt beschrieben:

$$|a| =$$

$$\begin{cases}
 a, & \text{falls a positiv oder gleich 0 ist} \\
 -a, & \text{falls a negativ ist}
\end{cases}$$

Der Betrag einer rationalen Zahl ist stets positiv; zueinander additiv inverse Elemente (Gegenzahlen) besitzen denselben Betrag.

Beispiele:

1.
$$|4,56| = 4,56$$

2.
$$|-\frac{2}{3}|=\frac{2}{3}$$

3.
$$|-2,7| = |2,7| = 2,7$$

4.
$$|0| = 0$$

Trichotomiegesetz:

Von 2 rationalen Zahlen ist stets eine die kleinere oder beide sind gleich:

$$a < b$$
 oder $a > b$ oder $a = b$

Beispiele: 1. 5

$$\Rightarrow \frac{5}{3} > \frac{18}{11}$$

(vergl. hierzu S. 70)

2.
$$-3\frac{1}{2}$$

und
$$-3.5$$

$$\Rightarrow$$
 $-3.5 = -3\frac{1}{2}$

Transitivitätsgesetz:

Ist eine rationale Zahl kleiner als eine zweite, diese wiederum kleiner als eine dritte, so ist auch die erste kleiner als die dritte Zahl:

wenn
$$a < b$$
 und $b < c \Rightarrow a < c$.

Geometrisch bedeutet dieser Sachverhalt, daß a weiter links als c auf der Zahlengeraden anzuordnen ist, wenn es eine Zahl b gibt, die größer als a, aber kleiner als c ist.

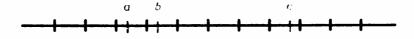


Abb. 59

1.
$$5\frac{1}{2} < \frac{17}{2}$$
 und $\frac{17}{2} < 10.7 \Rightarrow 5\frac{1}{2} < 10.7$

2.
$$-19.4 \le 0 \text{ und}$$
 $0 \le \frac{4}{7}$ $\Rightarrow -19.4 \le \frac{4}{7}$

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.19 Rechnen mit dem Taschenrechner

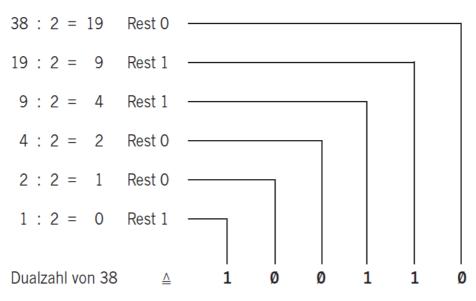
In der Technik müssen viele Berechnungen durchgeführt werden. Meistens verwenden wir dazu einen technischen Taschenrechner. Einige der gebräuchlichsten Tasten sind nachfolgend kurz beschrieben.

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.20 Umrechnung Dezimal- in Dualsystem

Die Dezimalzahl wird fortlaufend durch die Zahl 2 dividiert. Die Reste jedes Divisionsschrittes ergeben in umgekehrter Reihenfolge die Dualzahl.

Dezimalzahl 38



Umrechnung Dual-in das Dezimalsystem

Die Umrechnung vom Dualsystem in das Dezimalsystem wird wie folgt gehandhabt.

Im Dual-System sind die Stellenwerte die Potenzen der Basis 2.

Dualzahl 1 Ø Ø 1 1 Ø

- 3 MATHEMATIK
- 1 ARITHMETIK UND ALGEBRA GRUNDLAGEN

3.1.21 Römische Ziffern

Die Zuordnung der Rämischen Ziffern in das römische System ist nachfolgend dargestellt.

	△ 1	X	△ 10	XIX	△ 19	C	$\underline{\wedge}$	100
II	<u></u> 2	XX	≙ 20	XXIX	≙ 29	CC	$\underline{\wedge}$	200
Ш	<u></u> 3	XXX	≙ 30	XXXIX	≙ 39	CCC	$\underline{\wedge}$	300
IV	<u></u> 4	XL	≙ 40	XLIX	△ 49	CD	$\underline{\wedge}$	400
V	≙ 5	L	≙ 50	LIX	≙ 59	D	<u>^</u>	500
VI	<u></u> 6	LX	≙ 60	LXIX	≙ 69	DC	$\underline{\wedge}$	600
VII	<u></u> 7	LXX	△ 70	LXXIX	<u></u> 49	DCC	<u>^</u>	700
VIII	<u> </u>	LXXX	<u></u> 40	LXXXIX	<u></u> 49	DCCC	$\underline{\wedge}$	800
IX	<u></u> 9	XC	≙ 90	XCIX	<u></u> 99	CM	<u>^</u>	900
						M	<u>^</u> :	1000

Umrechnung Römisch in das Dezimalsystem

Die Umrechnung vom Römischen System in das Dezimalsystem wird wie folgt gehandhabt.