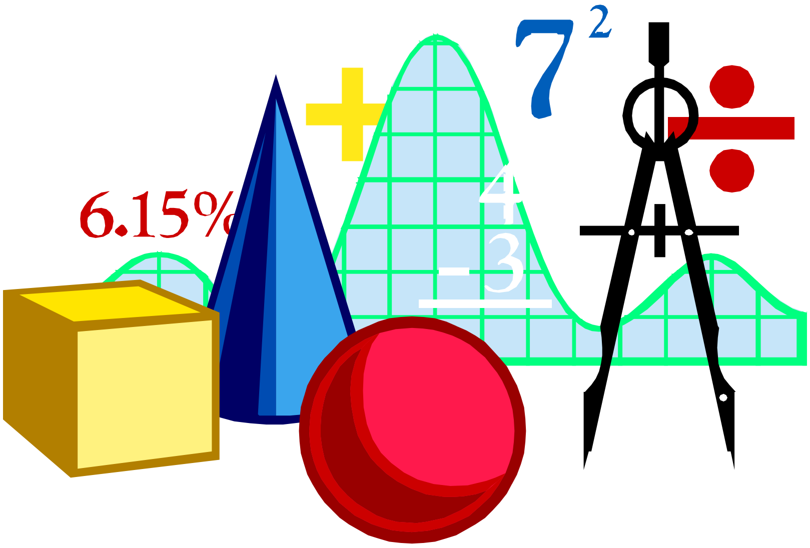
Kapitel 3
Mathematik

Kapitel 3.2
Algebra
Grundrechenarten



Verfasser:
Hans-Rudolf Niederberger
Elektroingenieur FH/HTL
Vordergut 1, 8772 Nidfurn
055 - 654 12 87

Ausgabe:
August 2008

Inhaltsverzeichnis

3 Mathematik

BiVo
Probleme umfassend bearbeiten
Verstehen und anwenden
Erinnern

TD Technische Dokumentation

BET Bearbeitungstechnik

TG Technologische Grundlagen
3.1 Mathematik

3.1.1 Arithmetische Operationen

- Operationen mit bestimmten und allgemeinen Zahlen
- Berechnungen mit Zehnerpotenzen
- Umrechnungen von Grössenordnungen mit Massvorsätzen

3.1.1 Logische Operationen

- Duales Zahlensystem
- Wahrheitstabelle
- Grundoperationen der Logik:
- AND, OR, NOT

3.1.1 Algebraische Gleichungen

- Gleichungen 1. Grades und rein quadratische Gleichungen
- Gleichungen 2. Grades mit Bezug zu den Fächern dieses Lehrplans

3.1.2 Geometrische Grössen

- Länge, Fläche, Volumen
- Seiten im rechtwinkligen Dreieck
- (Pythagoras)
- Trigonometrische Funktionen:
- Sinus, Cosinus, Tangens (0-90°)
- Darstellung der Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion im Einheitskreis und als Liniendiagramm

3.1.2 Grafische Darstellungen

- Diagrammarten
- Darstellungen im rechtwinkligen Koordinatensystem mit linearen und nichtlinearen Massstäben

3.1.2 Grafische Darstellungen

- Strecke, Pfeil als Mass einer Grösse (Vektor)
- Addition und Subtraktion mit zwei Grössen
- Addition und Subtraktion mit mehreren Grössen

EST Elektrische Systemtechnik

KOM Kommunikationstechnik

3.2 Algebra Grundrechenarten

3.2.1 Addieren und Subtrahieren

In einer Summe darf man die Summanden vertauschen. (Kommutativgesetz)	$a + b = b + a$
Beim addieren darf man die Summanden zu Teilsummen zusammenfassen. (Assoziativgesetz)	$(a+b)+c=a+(b+c)$
Gleichnamige Ausdrücke können zusammengefasst werden, indem die Beizahlen addiert oder subtrahiert werden.	$6a-3a+2a=5a$ $4a+2a=(4+2)\cdot a=6a$
Die Reihenfolge der einzelnen Glieder darf verändert werden.	$a-2c+b=a+b-2c$
Es lassen sich nur gleichnamige Ausdrücke zusammenfassen.	$3a+5b+a-2b=4a+3b$
Steht ein $+$-Zeichen vor dem Klammerausdruck, so können die Klammer und das $+$-Zeichen weggelassen werden, ohne dass sich der Wert in der Klammer ändert.	$\boldsymbol{a+(-b)=a-b}$ $\boldsymbol{a+(b-c)=a+b-c}$
Steht ein $-$-Zeichen vor der Klammer, so müssen bei ihrem Weglassen alle Vorzeichen in der Klammer umgekehrt werden. (Das $-$-Zeichen vor der Klammer fällt mit der Klammer weg)	$\boldsymbol{a-(-b)=a+b}$ $\boldsymbol{a-(b-c)=a-b+c}$

Summand
Summand

$$a+b=c$$

Summe

Minuend

Differenz

$$a-b=c$$

Subtrahend

3.2.2 Multiplizieren

Zwischen Faktoren, nicht aber zwischen Ziffern, kann man das Malzeichen weglassen	$4 \cdot a = 4a$ $5 \cdot 2 \cdot a \cdot b = 5 \cdot 2ab = 10ab$
Man kann die Faktoren vertauschen (Kommutativgesetz).	$b \cdot a \cdot c = a \cdot b \cdot c = abc$ $b \cdot a \cdot c \cdot 3 \cdot 4 = 12abc$
Ist ein Faktor Null, so ist das ganze Produkt Null.	$3 \cdot 0 = 0$ $a \cdot 0 = 0$ $10 \cdot a \cdot 0 \cdot b = 0$
Man darf Teilprodukte zusammenfassen (Assoziativgesetz).	$4a \cdot 5b = 4 \cdot 5 \cdot ab = 20ab$
Gleiche Anzahl negativer Vorzeichen ergeben ein positives (+) Resultat.	$a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = ab$
Ungerade Anzahl negativer Vorzeichen ergeben ein negatives (-) Resultat	$(-a) \cdot b = -ab$ $a \cdot (-b) = -ab$
Man multipliziert ein Klammerausdruck mit einem Faktor, indem man jedes Glied einer Summe mit dem Faktor multipliziert.	$n \cdot (a + b) = na + nb$
Man multipliziert zwei Klammerausdrücke, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen Summe multipliziert (siehe auch Binome).	$(a + b)(c + d) =$ $ac + bc + bc + bd$
Einen gemeinsamen Faktor kann man ausklammern.	$an + bn - n = n \cdot (a + b - 1)$

Definition der Elemente beim Multiplizieren

Faktor
Faktor

$a \cdot b = c$ Resultat

Produkt

3.2.3 Dividieren von Brüchen

Doppelpunkt und Bruchstrich sind gleichbedeutende Rechenzeichen.	$\frac{a}{b} = a : b$
Zähler und Nenner darf man nicht vertauschen, es entsteht sonst der Kehrwert des Bruches.	$\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}; \frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$
Gleiche Anzahl negativer Vorzeichen ergeben ein positives (+) Resultat.	$\frac{a}{b} = +\frac{a}{b}$
Ungerade Anzahl negativer Vorzeichen ergeben ein negatives (-) Resultat	$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$
Beim Kürzen Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl teilen.	$\frac{3ab}{6bc} = +\frac{3 \cdot a \cdot b}{2 \cdot 3 \cdot b \cdot c} = \frac{a}{2c}$
Man darf niemals bei einem Bruch einzelne Summanden einer Summe kürzen.	$\frac{3a}{2} = \frac{2a+a}{2} \neq a + a = 2a$
Sind bei einem Bruch Zähler oder Nenner Summen, so muss man alle Summanden durch die gleiche Zahl kürzen.	$\frac{ab+ac}{a} = b + c$
Sind Zähler und Nenner Summen, so muss man, wenn möglich, gemeinsame Faktoren ausklammern und kann dann gleiche Faktoren kürzen. Der zu kürzende Faktor kann in sich auch eine Summe sein.	$\frac{ab+ac}{b^2+bc} = \frac{a(b+c)}{b(b+c)} = \frac{a}{b}$

Merke

Normalerweise wird eine Division als Bruch geschrieben

Quotioent (Bruch)

$$\frac{a}{b} = a : b = c$$

Divisor

Divident

Zähler

$$\frac{a}{b}$$

Nenner

3.2.4 Dividieren mit Doppelbrüchen

Doppelbrüche werden dividiert, indem man den zweiten Bruch umstürzt und dann die Brüche multipliziert.	$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$
Wird ein Bruch durch eine Zahl dividiert, so wird der Nenner des Bruches mit dieser Zahl multipliziert.	$\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{1} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$
Wird ein Zahl durch einen Bruch dividiert, so wird die Zahl mit dem Nenner des Bruches multipliziert. Doppelbrüche werden dividiert, indem man den zweiten Bruch umstürzt und dann die Brüche multipliziert.	$\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a}{1} : \dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{1} \cdot \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$
Ein Doppelbruch kann vereinfacht werden, indem man mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner die zwei Brüche erweitert (Erweiterungsmethode)	$\dfrac{\frac{a}{b}-1}{\frac{b}{a}+\frac{1}{b}} = \dfrac{\left(\frac{a}{b}-1\right)\cdot ab}{\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot ab} = \dfrac{a^2-ab}{b^2+a}$

Quotioent (Doppelbruch)

Dividend (Bruch)

$$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Divisor (Bruch)

Zähler

$$\frac{a}{b}$$

Nenner

Um auf den größten gemeinsamen Teiler (ggT) bzw. das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) einzugehen, muss man zunächst einen Abstecher zu den Primzahlen unternehmen, die für die Faktorzerlegung nötig sind.

Definition einer Primzahl:

Eine natürliche Zahl n > 1 ist eine Primzahl genau dann, wenn sie die trivialen Teiler 1 und n hat - oder anders ausgedrückt: Eine natürliche Zahl größer als 1 ist eine Primzahl, wenn sie nur durch sich selbst oder 1 teilbar ist.

Um beim addieren den kleinsten gemeinsamen Bruch zu finden, muss zuerst der kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) gefunden werden.

Um beim dividieren von Brüchen so weit wie möglich kürzen zu können muss der grösste gemeinsame Teiler (ggT) gefunden werden.

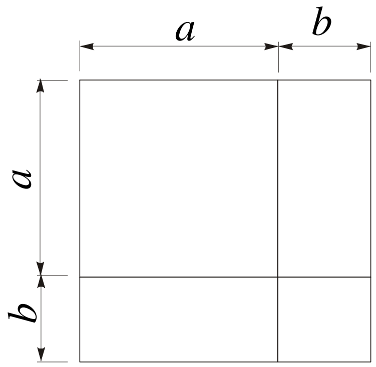
3.2.5 Binome

Ein Binom (lat. bi, zwei; nomen, Name; diese Bezeichnung geht zurück auf Euklid ist in der Mathematik ein Polynom mit zwei Gliedern, genauer: Ein Binom ist Summe oder Differenz zweier Monome.

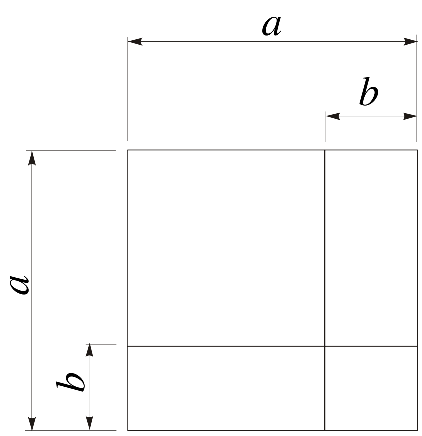
3.2.5.1 Die Sonderfälle des Binoms

Folgende Sonderfälle sind als Binomische Formeln bekannt:

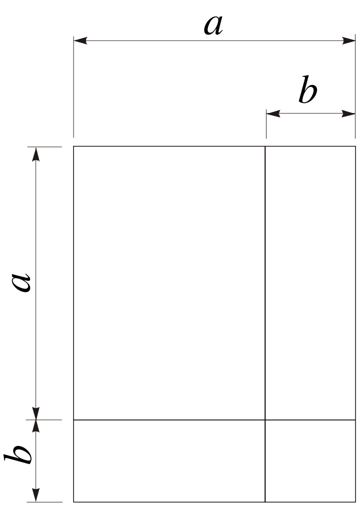
$(a+b)^2 =$
$(a+b)(a+b) =$
$a^2 + 2ab + b^2$



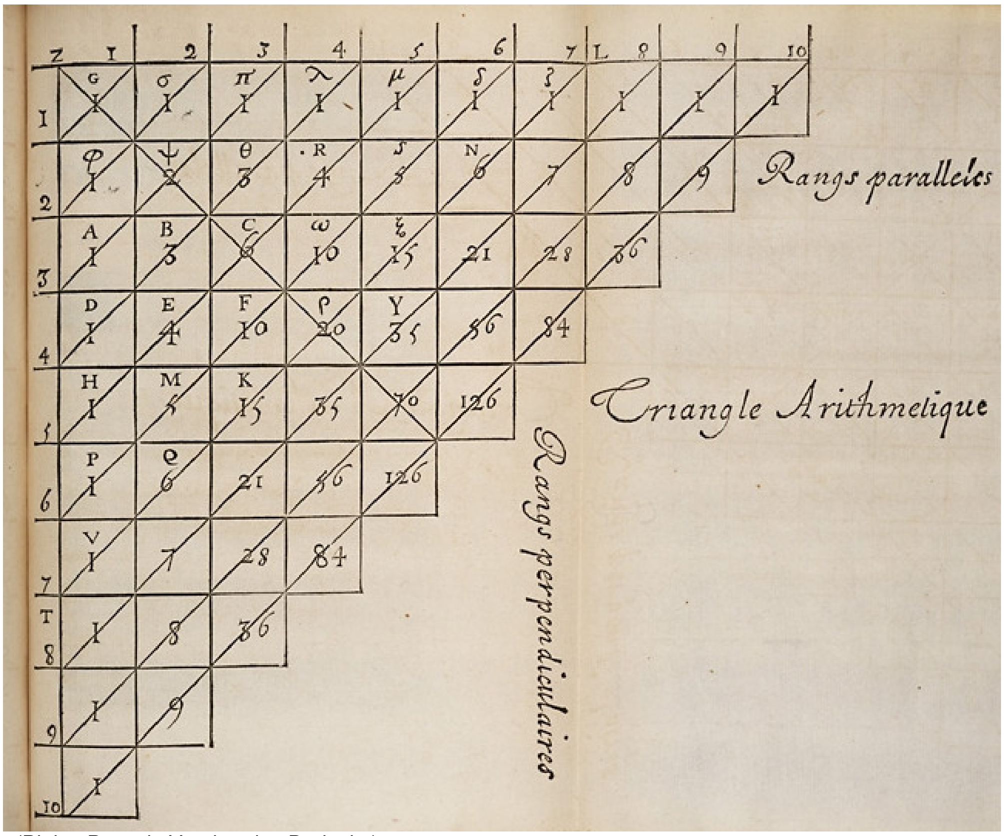
$(a-b)^2 =$
$(a-b)(a-b) =$
$a^2 - 2ab + b^2$



$(a-b)(a+b) =$
$a^2 - b^2$



3.2.5.2 Pascal'sches Dreieck



(Blaise Pascals Version des Dreiecks)

http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/pascalmod.htm

Blaise Pascal
(* 19. Juni 1623 in Clermont-Ferrand; † 19. August 1662 in Paris) war ein französischer Mathematiker, Physiker, Literat und christlicher Philosoph.

Pascal erfand 1642 eine mechanische Rechenmaschine für Addition und Subtraktion.

$$p = \rho \cdot g \cdot h \ [Pa]$$

1653 verfasste er eine Abhandlung über den Luftdruck, in der zum ersten Mal in der Wissenschaftsgeschichte die Hydrostatik umfassend behandelt wird.

3.2.6 Exponentialrechnen, Potenzieren

Addition und Subtraktion	$3a^2 + 2a^2 - a^2 = 4a^2$	Gleiche Potenzen, also Ausdrücke mit gleichen Exponenten und gleicher Basis werden addiert oder subtrahiert, indem man nur ihre Beizahlen addiert oder subtrahiert und die Potenz beibehält.
Multiplikation	$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$	Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.
	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	Potenzem mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem das Produkt der Basis mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert wird.
Division	$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man die Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.
	$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	Potenzen mit unterschiedlicher Basis und gleichem Exponenten können zusammengefasst werden.
	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem reziproken Wert der gleichen Potenz mit positivem Exponenten.
	$a^m : a^n : a^i = \frac{\frac{a^m}{a^n}}{a^i} = a^{(m-n)-i}$	Die Reihenfolge der Berechnung muss genau beachtet werden.
Potenzieren von Potenzen	$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$	Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert. Man kann die Exponenten vertauschen

3.2.7 Wurzelrechnen, Radizieren

2
1
$$\sqrt[n]{a} = b$$
3

4
$$a = b^n$$
5
6

Beim Wurzelziehen sind Potenzwert (a) und Exponent (n) bekannt, gesucht wird die Basis (b).

Die Operation heisst Wurzelziehen oder Radizieren. Dabei ist n der Wurzelindex oder Wurzelexponent, a ist der Radikant und b der Wurzelwert.

Beim Wurzelziehen, ist zu beachten, dass der Wurzelwert immer einen positiven und negativen wert sein kann.

Addition und Subtraktion	$2\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a} = 4\sqrt[3]{a}$	Nur gleichnamige Wurzelausdrücke lassen sich zusammenziehen (Beizahlen addieren und subtrahieren).
Multiplikation	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	Gleichnamige Wurzeln werden multipliziert, indem die Wurzel aus dem Produkt der Radikanden gezogen wird. Ein Produkt wird radiziert, indem jeder Faktor radiziert wird.
Division	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	Gleichnamige Wurzeln werden dividiert, indem die Wurzel aus dem Quotienten der Radikanden gezogen wird. Ein Quotient wird radiziert, indem aus dem Zähler und aus dem Nenner die Wurzel gezogen wird.
Potenzieren	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$	Eine Wurzel wird potenziert, indem der Radikand potenziert und daraus die Wurzel gezogen wird. Jede Wurzel kann in eine Potenz mit geprochenem Exponenten umgewandelt werden.

Wurzelgleichungen

Wenn das unbekannte Glied unter der Wurzel steht, wird die Gleichung geordnet, bis nur noch der Wurzelwert auf einer Seite steht. Nun wird mit dem geeigneten Wert potenziert.

Als letzter Schritt wird die Gleichung aufgelöst.

Übungsbeispiel:

$\sqrt{\boldsymbol{x}+4}=3$

3.2.8 Logarithmieren

3.2.8.1 Grundbegriffe des Logarithmieren

Ist der Exponennt einer Potenz die gesuchte Grösse, stossen wir unweigerlich auf die Logarithmen.

Beispiel: $5^X = 125$

Hier sollen wir x so bestimmen, dass die berechnete Potenz 125 ergibt. In diesem einfachen Beispiel kann man $x = 3$ einfach herausfinden, denn $5^3 = 125$. Ist die Aufgabe komplexer, kann die Lösung nicht mehr durch Raten oder Probieren gefunden werden. Daraus folgt, dass man nach dem unbekannten Exponenten auflösen muss. In unserem Fall ergibt sich für die Gleichung folgende Form:

$5^X = 125$ daraus folgt $x = \log_5 125$ sprich:
„Logarithmus von 125 zur Basis 5“

Allgemein kann jede Potenz in einen Logaritmus verwandelt werden.

$a^x = b$ daraus folgt $\underbrace{x}_{\text{Logarithmus}} = \log_{\underbrace{a}_{\text{Basis}}} \overbrace{b}^{\text{Numerus}}$

Man spricht hier Logarithmus von b zur Basis a“.
Ein Logarithmus ist der Wert, mit dem man die Basis potenzieren muss, um den Numerus zu erhalten.

Beispiel: $\log_2 8 = 3$

Logarithmen können auch mit dem Taschenrechner bestimmt werden. Da es unendlich viele Möglichkeiten für die Basis gibt, haben sich die Rechnerproduzenten auf zwei häufige Basen beschränkt. So findet man auf jedem technischen Taschenrechner eine Taste zur Berechnung des Zehnerlogarithmus $\boxed{\text{LOG}}$ und des natürlichen Logaritnus $\boxed{\text{LN}}$.

Zehnerlogaritmus	Basis 10	Taste	$\boxed{\text{LOG}}$
Natürlicher Logaritmus	Basis $e = 2{,}178$	Taste	$\boxed{\text{LN}}$

Die Zahl e heisst Eulersche Zahl und ist eine irrationale Zahl wie die Keiskonstante π.

Der Numerus
(Mehrzahl: Numeri) ist in der Grammatik eine Zählform zur Bestimmung von Mengenwertigkeiten, also zur Festlegung beziehungsweise Unterscheidung der Anzahl.

Logarithmen
Die Bestimmung des Exponenten heisst logarithmieren.
Mit Logarithmen lassen sich sehr stark wachsende Zahlenreihen übersichtlich darstellen, da der Logarithmus für große Zahlen viel langsamer steigt als die Zahlen selbst.

Eulersche Zahl
Die eulersche Zahl = 2,7182818284590452 35...
(benannt nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler) ist eine irrationale und sogar transzendente reelle Zahl.

Die eulersche Zahl spielt in der gesamten Analysis und allen damit verbundenen Teilgebieten der Mathematik und besonders in der Differential- und Integralrechnung eine zentrale Rolle. Sie gehört zu den wichtigsten Konstanten der Mathematik.

Leonhard Euler
(* 15. April 1707 in Basel; † 7. September 1783 in Sankt Petersburg) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker. Wegen seiner Beiträge zur Analysis, zur Zahlentheorie und zu vielen weiteren Teilgebieten der Mathematik gilt er als einer der bedeutendsten Mathematiker.

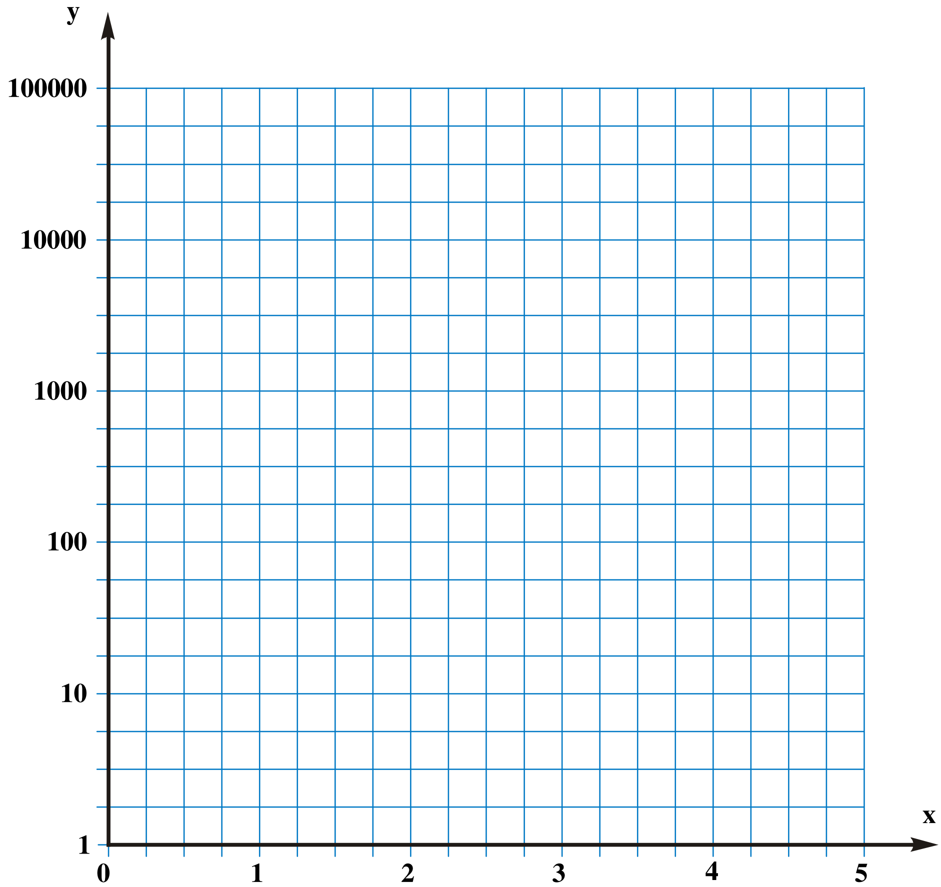
3.2.8.2 Logarithmische Darstellung

In der Wissenschaft und der Technik werden Diagramme oft in ein logaritmisches Koordinatensystem gezeichnet. Das heisst, die Skalierung einer oder beider Achsen wächst nicht linear, sondern jeweils um einen Faktor.

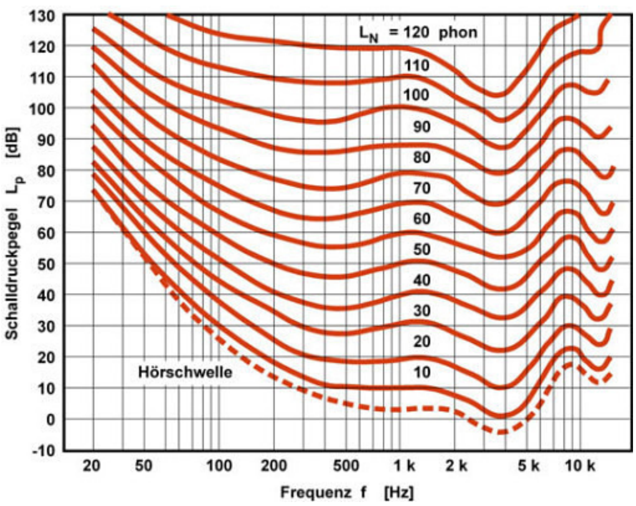
Hier wurde die y-Achse logaritmisch dargestellt.

Funktion einzeichnen:

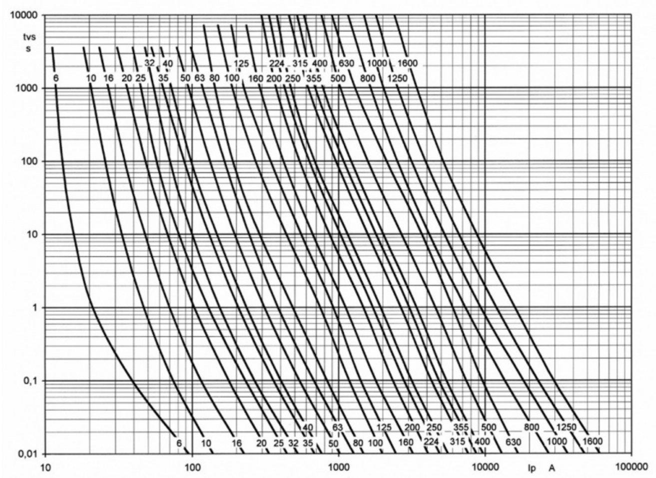
$y = 10^x$



Der Grund für diese Skalierung liegt darin, dass ein Graf besser sichtbar gemacht werden kann. Als Veranschaulichung wollen wir einige Grafen in logaritmischer Darstellung betrachten.



Zusammenhang zwischen Lautstärkepegel und Schalldruckpegel in Abhängigkeit von der Frequenz für Sinustöne im freien Schallfeld



Kennlinie von Schmelzsicherungen

Man sieht, dass der Graf erst in der logarithmischen Darstellung aussagekräftig wird.

3.2.8.3 Formelsammlung des Logarithmieren

Potenzieren

$$a^x = b$$

Umkehrung 1 des Potenzieren führt zum Radizieren

$$a = \sqrt[x]{b}$$

Umkehrung 2 des Potenzieren führt zum Logarithmieren
$Log_a b$ ist dijenige reelle Zahl x, für die $a^X = b$ gilt.

$$\underbrace{x}_{\text{Logarithmus}} = \log_{\underbrace{a}_{\text{Basis}}} \overbrace{b}^{\text{Numerus}}$$

Ein Produkt wird logarithmiert, indem man die Logarithmen der Faktoren addiert.

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

Ein Bruch wird logarithmiert, indem man vom Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahiert

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

Ein Potenz wird logarithmiert, indem man den Logarithmus der Basis mit dem Exponenten multipliziert

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Sonderfall

$$\log_a \sqrt[v]{b^n} = \frac{n}{v} \cdot \log_a b$$

Die Kennzahl des des Logarithmus für eine Zahl, die grösser ist als eins, ist immer um 1 kleiner als die Stellenzahl der ganzen Zahl vor dem Komma.

$10^x = 1000$ ==> $x = \log 1000$

$$\underbrace{3}_{\text{Kennzahl}} = \log \overbrace{1000}^{\text{Stellenzahl =4}}$$

Die Kennzahl des Logarithmus für eine Zahl, die kleiner ist als 1, ist immer negativ (-1, -2, -3) und ohne Berücksichtigung des Kommas gleich der Anzahl Nullen vor der ersten Ziffer. Man schreibt sie hinter die Mantisse.

$10^x = 0{,}001$ ==> $x = \log 0{,}001$

$$\underbrace{-3}_{\text{Kennzahl}} = \log \overbrace{0{,}001}^{\text{Stellenzahl =4}}$$

Der Begriff natürlicher Logarithmus wurde gewählt, weil sowohl die Exponentialfunktion als auch der Logarithmus zur Basis in vielen Zusammenhängen (Integralrechnung, Differentialrechnung, Komplexe Zahlen, Trigonometrie) auf natürliche Weise ohne Vorfaktoren auftreten. Insbesondere lässt sich der natürliche Logarithmus sehr einfach integrieren und differenzieren.

$$\log_e a = \ln a$$
$$e^x = a$$
$$x = \ln a$$

Logarithmenregeln
$(a, b > 0)$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$
$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$
$$\ln a^n = n \ln a$$