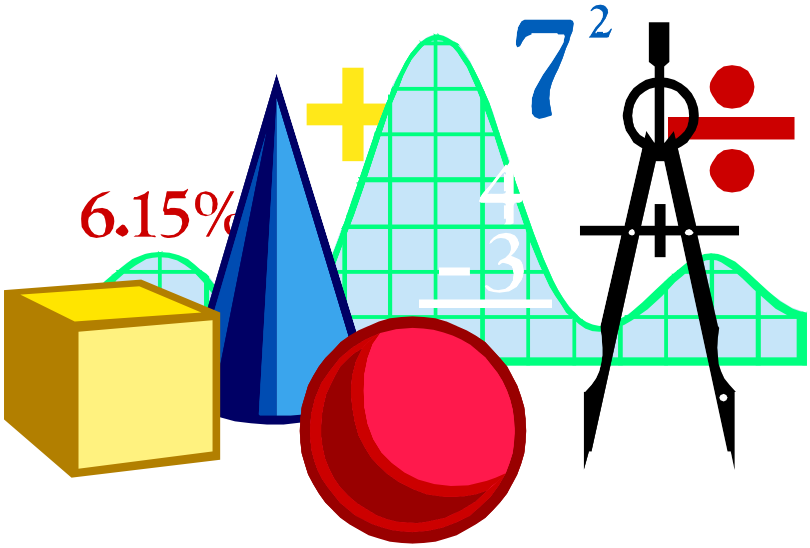
Kapitel 3
Mathematik

Kapitel 3.2
Algebra
Grundrechenarten



Verfasser:
Hans-Rudolf Niederberger
Elektroingenieur FH/HTL
Vordergut 1, 8772 Nidfurn
055 - 654 12 87

Ausgabe:
August 2008

Inhaltsverzeichnis

3 Mathematik

3.2 Algebra Grundrechenarten

3.2.1 Addieren und Subtrahieren

In einer Summe darf man die Summanden vertauschen. (Kommutativgesetz)	$a + b = b + a$
Beim addieren darf man die Summanden zu Teilsummen zusammenfassen. (Assoziativgesetz)	$(a+b)+c=a+(b+c)$
Gleichnamige Ausdrücke können zusammengefasst werden, indem die Beizahlen addiert oder subtrahiert werden.	$6a-3a+2a=5a$ $4a+2a=(4+2)\cdot a=6a$
Die Reihenfolge der einzelnen Glieder darf verändert werden.	$a-2c+b=a+b-2c$
Es lassen sich nur gleichnamige Ausdrücke zusammenfassen.	$3a+5b+a-2b=4a+3b$
Steht ein $+$-Zeichen vor dem Klammerausdruck, so können die Klammer und das $+$-Zeichen weggelassen werden, ohne dass sich der Wert in der Klammer ändert.	$a+(-b)=a-b$ $a+(b-c)=a+b-c$
Steht ein $-$-Zeichen vor der Klammer, so müssen bei ihrem Weglassen alle Vorzeichen in der Klammer umgekehrt werden. (Das $-$-Zeichen vor der Klammer fällt mit der Klammer weg)	$a-(-b)=a+b$ $a-(b-c)=a-b+c$

Summand
Summand

$$a+b=c$$

Summe

Minuend

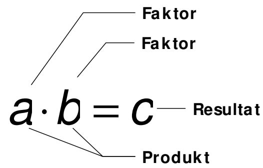
Differenz

$$a-b=c$$

Subtrahend

3.2.2 Multiplizieren

Definition der Elemente beim Multiplizieren



Zwischen Faktoren, nicht aber zwischen Ziffern, kann man das Malzeichen weglassen	$4 \cdot a = 4a$ $5 \cdot 2 \cdot a \cdot b = 5 \cdot 2ab = 10ab$
Man kann die Faktoren vertauschen (Kommutativgesetz).	$b \cdot a \cdot c = a \cdot b \cdot c = abc$ $b \cdot a \cdot c \cdot 3 \cdot 4 = 12abc$
Ist ein Faktor Null, so ist das ganze Produkt Null.	$3 \cdot 0 = 0$ $a \cdot 0 = 0$ $10 \cdot a \cdot 0 \cdot b = 0$
Man darf Teilprodukte zusammenfassen (Assoziativgesetz).	$4a \cdot 5b = 4 \cdot 5 \cdot ab = 20ab$
Gleiche Anzahl negativer Vorzeichen ergeben ein positives (+) Resultat.	$a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = ab$
Ungerade Anzahl negativer Vorzeichen ergeben ein negatives (-) Resultat	$(-a) \cdot b = -ab$ $a \cdot (-b) = -ab$
Man multipliziert ein Klammerausdruck mit einem Faktor, indem man jedes Glied einer Summe mit dem Faktor multipliziert.	$n \cdot (a + b) = na + nb$
Man multipliziert zwei Klammerausdrücke, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen Summe multipliziert (siehe auch Binome).	$(a+b)(c+d) =$ $ac + bc + bc + bd$
Einen gemeinsamen Faktor kann man ausklammern.	$an + bn - n = n \cdot (a + b - 1)$

3.2.3 Dividieren von Brüchen

Doppelpunkt und Bruchstrich sind gleichbedeutende Rechenzeichen.	$\frac{a}{b} = a : b$
Zähler und Nenner darf man nicht vertauschen, es entsteht sonst der Kehrwert des Bruches.	$\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}; \frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$
Gleiche Anzahl negativer Vorzeichen ergeben ein positives (+) Resultat.	$\frac{a}{b} = +\frac{a}{b}$ $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
Ungerade Anzahl negativer Vorzeichen ergeben ein negatives (-) Resultat	$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$
Beim Kürzen Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl teilen.	$\frac{3ab}{6bc} = +\frac{3 \cdot a \cdot b}{2 \cdot 3 \cdot b \cdot c} = \frac{a}{2c}$
Man darf niemals bei einem Bruch einzelne Summanden einer Summe kürzen.	$\frac{2a+a}{2} \neq a + a = 2a$
Sind bei einem Bruch Zähler oder Nenner Summen, so muss man alle Summanden durch die gleiche Zahl kürzen.	$\frac{ab+ac}{a} = b + c$
Sind Zähler und Nenner Summen, so muss man, wenn möglich, gemeinsame Faktoren ausklammern und kann dann gleiche Faktoren kürzen. Der zu kürzende Faktor kann in sich auch eine Summe sein.	$\frac{ab+ac}{b^2+bc} = \frac{a(b+c)}{b(b+c)} = \frac{a}{b}$

Merke

Normalerweise wird eine Division als Bruch geschrieben

Quotioent (Bruch)

$$\frac{a}{b} = a : b = c$$

Divisor

Divident

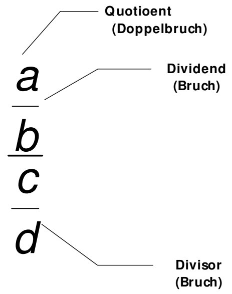
Zähler

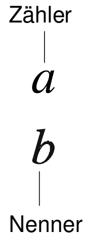
$$\frac{a}{b}$$

Nenner

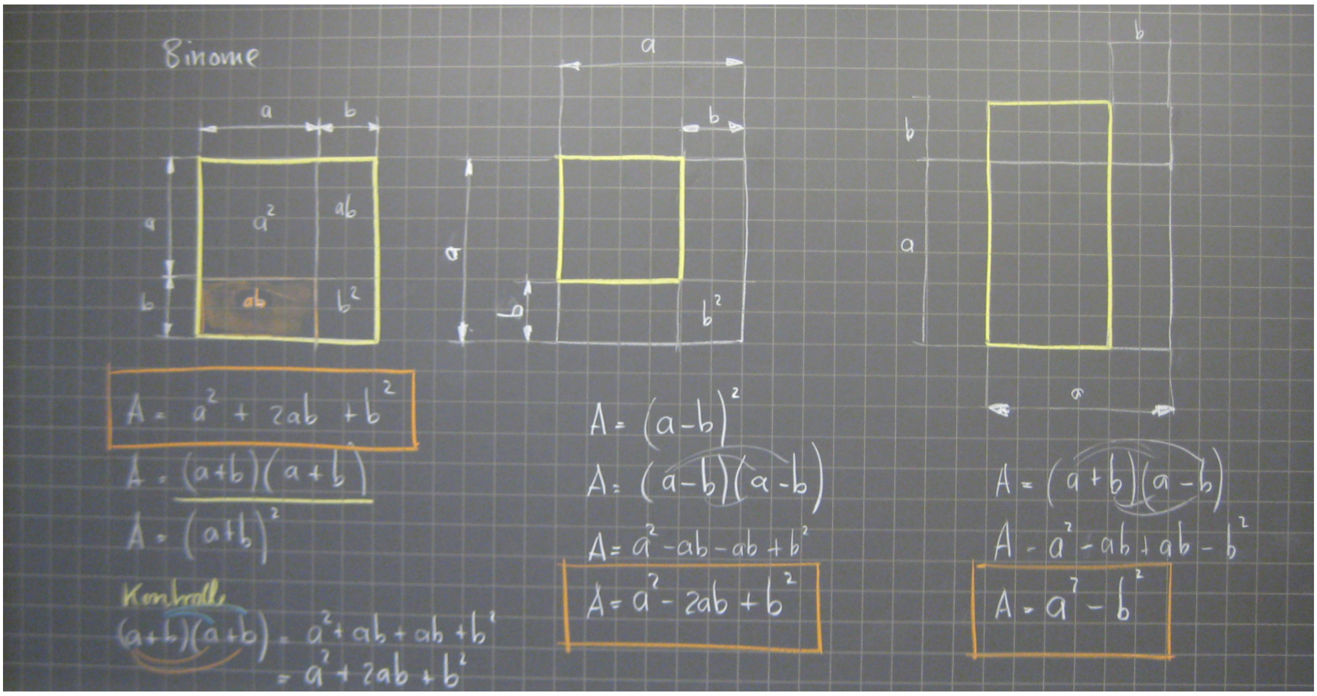
3.2.4 Dividieren mit Doppelbrüchen

Doppelbrüche werden dividiert, indem man den zweiten Bruch umstürzt und dann die Brüche multipliziert.	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
Wird ein Bruch durch eine Zahl dividiert, so wird der Nenner des Bruches mit dieser Zahl multipliziert.	$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$
Wird ein Zahl durch einen Bruch dividiert, so wird die Zahl mit dem Nenner des Bruches multipliziert. Doppelbrüche werden dividiert, indem man den zweiten Bruch umstürzt und dann die Brüche multipliziert.	$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$
Ein Doppelbruch kann vereinfacht werden, indem man mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner die zwei Brüche erweitert (Erweite-rungsmethode)	$\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{b}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{\left(\frac{a}{b}-1\right)\cdot ab}{\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot ab} = \frac{a^2-ab}{b^2+a}$





3.2.5 Binome


Binome
a
b
a²
ab
ab
b²
A = a² + 2ab + b²
A = (a+b)(a+b)
A = (a+b)²
Kontrolle
(a+b)(a+b) = a² + ab + ab + b²
= a² + 2ab + b²
A = (a−b)²
A = (a−b)(a−b)
A = a² − ab − ab + b²
A = a² − 2ab + b²
A = (a+b)(a−b)
A = a² − ab + ab − b²
A = a² − b²

3.2.6 Exponentialrechnen, Potenzieren

Addition und Subtraktion	$3a^2 + 2a^2 - a^2 = 4a^2$	Gleiche Potenzen, also Ausdrücke mit gleichen Exponenten und gleicher Basis werden addiert oder subtrahiert, indem man nur ihre Beizahlen addiert oder subtrahiert und die Potenz beibehält.
Multiplikation	$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$	Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.
	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	Potenzem mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem das Produkt der Basis mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert wird.
Division	$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man die Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.
	$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	Potenzen mit unterschiedlicher Basis und gleichem Exponenten können zusammengefasst werden.
	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem rezeproken Wert der gleichen Potenz mit positivem Exponenten.
	$a^m : a^n : a^i = \frac{\frac{a^m}{a^n}}{a^i} = a^{(m-n)-i}$	Die Reihenfolge der Berechnung muss genau beachtet werden.
Potenzieren von Potenzen	$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$	Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert. Man kann die Exponenten vertauschen

3.2.7 Wurzelrechnen, Radizieren

Addition und Subtraktion	$2\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a}=4\sqrt[3]{a}$	Gleichnamige Wurzelausdrücke lassen sich zusammenziehen (Beizahlen addieren und subtrahieren).
Multiplikation	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	Gleichnamige Wurzeln werden multipliziert, indem die Wurzel aus dem Produkt der Radikanden gezogen wird. Ei Produkt wird radiziert, indem jeder Faktor radiziert wird.
Division	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	Gleichnamige Wurzeln werden dividiert, indem die Wurzel aus dem Quotienten der Radikanden gezogen wird. Ein Quotient wird radiziert, indem aus dem Zähler und aus dem Nenner die Wurzel gezogen wird.
Potenzieren	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}$	Eine Wurzel wird potenziert, indem der Radikand potenziert und daraus die Wurzel gezogen wird. Jede Wurzel kann in eine Potenz mit gebrochenem Exponenten umgewandelt werden.

3.2.8 Logarithmieren

Potenzieren	$a^n = b$
Umkehrung 1 des Potenzieren führt zum Radizieren	$a = \sqrt[n]{b}$
Umkehrung 2 des Potenzieren führt zum Logarithmieren Log$_a$b ist dijenige reelle Zahl x, für die a^x =b gilt.	$\underbrace{x}_{\text{Logarithmus}} = \log_{\underbrace{a}_{\text{Basis}}} \overbrace{b}^{\text{Numerus}}$
Ein Produkt wird logarithmiert, indem man die Logarithmen der Faktoren addiert.	$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
Ein Bruch wird logarithmiert, indem man vom Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahiert	$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$
Ein Potenz wird logarithmiert, indem man den Logarithmus der Basis mit dem Exponenten multipliziert	$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
Sonderfall	$\log_a \sqrt[v]{b^n} = \frac{n}{v} \cdot \log_a b$
Die Kennzahl des des Logarithmus für eine Zahl, die grösser ist als eins, ist immer um 1 kleiner als die Stellenzahl der ganzen Zahl vor dem Komma.	$\underbrace{3}_{\text{Kennzahl}} = \log \overbrace{1000}^{\text{Stellenzahl} = 4}$
Die Kennzahl des Logarithmus für eine Zahl, die kleiner ist als 1, ist immer negativ (-1, -2, -3) und ohne Berücksichtigung des Kommas gleich der Anzahl Nullen vor der ersten Ziffer. Man schreibt sie hinter die Mantisse.	$\underbrace{-3}_{\text{Kennzahl}} = \log \overbrace{0{,}001}^{\text{Stellenzahl} = 4}$