Kapitel 3
Mathematik

Kapitel 3.4
Geometrie
Planimetrie

Verfasser:
Hans-Rudolf Niederberger
Elektroingenieur FH/HTL
Vordergut 1, 8772 Nidfurn
055 - 654 12 87

Ausgabe:
Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

BiVo
Probleme umfassend bearbeiten
Verstehen und anwenden
Erinnern

TD Technische Dokumentation

BET Bearbeitungstechnik

TG Technologische Grundlagen
3.1 Mathematik

3.1.1 Arithmetische Operationen

- Operationen mit bestimmten und allgemeinen Zahlen
- Berechnungen mit Zehnerpotenzen
- Umrechnungen von Grössenordnungen mit Massvorsätzen

3.1.1 Logische Operationen

- Duales Zahlensystem
- Wahrheitstabelle
- Grundoperationen der Logik:
- AND, OR, NOT

3.1.1 Algebraische Gleichungen

- Gleichungen 1. Grades und rein quadratische Gleichungen
- Gleichungen 2. Grades mit Bezug zu den Fächern dieses Lehrplans

3.1.2 Geometrische Grössen

- Länge, Fläche, Volumen
- Seiten im rechtwinkligen Dreieck
- (Pythagoras)
- Trigonometrische Funktionen:
- Sinus, Cosinus, Tangens (0-90°)
- Darstellung der Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion im Einheitskreis und als Liniendiagramm

3.1.2 Grafische Darstellungen

- Diagrammarten
- Darstellungen im rechtwinkligen Koordinatensystem mit linearen und nichtlinearen Massstäben

3.1.2 Grafische Darstellungen

- Strecke, Pfeil als Mass einer Grösse (Vektor)
- Addition und Subtraktion mit zwei Grössen
- Addition und Subtraktion mit mehreren Grössen

EST Elektrische Systemtechnik

KOM Kommunikationstechnik

3 Mathematik
3.4 Geometrie Planimetrie
3.4.1 Einleitung

Schon um 30O v. Chr. hat der griechische Mathematiker Euklid ein Buch geschrieben, das die „Elemente der Raumlehre“ (der Geometrie) enthielt.

Auch der Elektroinstallateur/in muss sich mit den Grundlagen der Euklid'schen Lehre vertraut machen, um Flächenberechnungen, Körper- und Gewichtsberechnungen vornehmen zu können. Von grundlegender Bedeutung ist auch die Trigonometrie (Winkelmessung), die vom Elektrofachmann beherrscht werden muss, um die elektrotechnischen Vorgange im 1-Phasen- und 3-Phasen-Wechselstromnetz verstehen und berechnen zu können.

Die Mathematik besteht aus vielen Teilgebieten. Die drei wichtigsten sind:

Arithmetik (Lehre von den Zahlengrössen)
Algebra (Lehre von den Gleichungen)
Geometrie (Lehre von den Raumgrössen)

Unser heutiges technisches Zeitalter wäre ohne die Mathematik nicht denkbar, deshalb ist sie die Grundlage für alle technischen Berufe. Die Lehre von den Zahlengrössen (Arithmetik) gliedert sich in:

1. das Rechnen mit bestimmten Zahlen, die im allgemeinen durch die arabischen Ziffern dargestellt werden (1; 2; 3; 4; ....)
2. das Rechnen mit Variablen, die üblicherweise durch Buchstaben dargestellt werden (a; b; c)

Von grundlegender Bedeutung ist auch die Trigonometrie (Winkelmessung), die vom Berufsmann oder von der Berufsfrau beherrscht werden muss, um komplexe Winkelberechnungen verstehen und ausführen zu können.

Die Lehre von den Raumgrössen (Geometrie) gliedert sich in:

Die Lehre von den ebenen Flächen (Planimetrie)
Die Lehre von den Körpern (Stereometrie)
Die Berechnung von Dreiecken (Trigonometrie)

Die Grundlage dieses Gebäudes ist die menschliche Vernunft; das heisst, die Mathematik baut auf Grundsätzen (Axiome) auf, die beweislos vorausgesetzt werden. Einige lauten:

1. Jede Grösse ist sich selbst gleich.
2. Werden gleiche Grössen gleich behandelt, so ergeben sich gleiche Grössen.
3. Sind zwei Grössen einer dritten gleich, so sind sie auch untereinander gleich.

Alle anderen mathematischen Aussagen (Lehrsätze) müssen bewiesen werden, d.h. man muss sie auf bekannte Lehrsätze oder Grundsätze zurückführen.

3.4.1.1 Das griechische Alphabet

Das griechische Alphabet umfasst 24 Buchstaben.

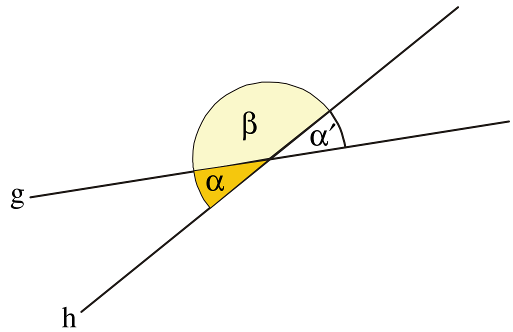
Grossbuch-staben		Kleinbuch-staben	Translite-ration	Name
1.	Α	α	a	Alpha
2.	Β	β	b	Beta
3.	Γ	γ	g	Gamma
4.	Δ	δ	d	Delta
5.	Ε	ε	e	Epsilon
6.	Ζ	ζ	z	Zeta
7.	Η	η	ë (gespr. Ä)	Eta
8.	Θ	ϑ	th	Theta
9.	Ι	ι	i	Iota
10.	Κ	κ	k	Kappa
11.	Λ	λ	l	Lambda
12.	Μ	μ	m	My
13.	Ν	ν	n	Ny
14.	Ξ	ξ	x	Xi
15.	Ο	ο	o	Omikron
16.	Π	π	p	Pi
17.	Ρ	ρ	r	Rho
18.	Σ	σ	s	Sigma
19.	Τ	τ	t	Tau
20.	Υ	υ	y (gespr. ü)	Ypsilon
21.	ϕ	φ	ph (gespr. f)	Phi
22.	Χ	χ	ch	Chi
23.	Ψ	ψ	ps	Psi
24.	Ω	ω	õ	Omega

3.4.1.2 Die Flächenlehre (Planimetrie)

Die Flächenlehre gehört ebenfalls zur Mathematik, und zwar ist sie ein Teilgebiet der sogenannten **Geometrie**, was wörtlich übersetzt **„Erdmessung“** bedeutet.

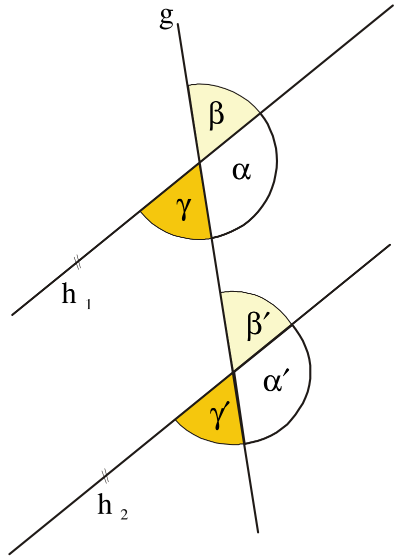
Das Fremdwort **Planimetrie** das vielfach gebraucht wird, kommt ". von „plan“ (=eben); es handelt sich also hier um Gebilde. Wir werden im Verlaufe dieser Ausbildung häufig Flächen- und Winkelberechnungen durchführen müssen, und in der Flächenlehre lernen wir jetzt, wie das gemacht wird.

3.4.1.3 Formelsammlung Winkel



Nebenwinkel
Zwei Nebenwinkel ergeben zusammen einen gestreckten Winkel:

$\alpha + \beta = 180°$



Scheitelwinkel
Scheitelwinkel sind gleich gross:

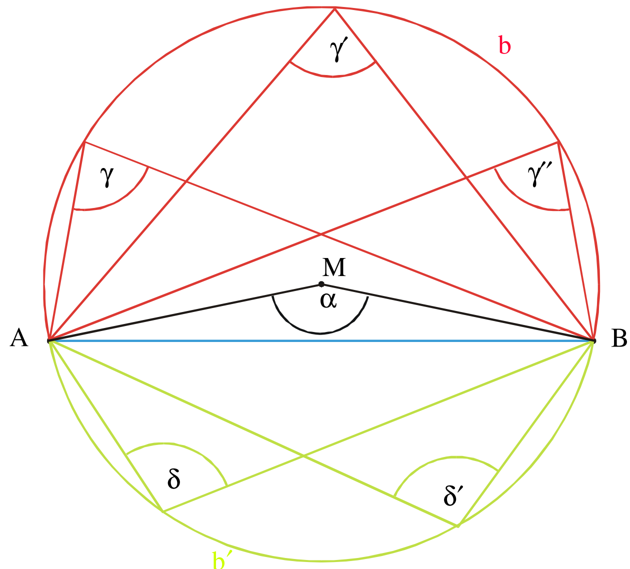
$\alpha = \alpha'$

Stufenwinkel
Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen ($h_1 // h_2$) sind gleich gross $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$

Wechselwinkel
Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen ($h_1 // h_2$) sind gleich gross $\beta' = \gamma$, $\beta = \gamma'$

Winkel am Kreis

b : Kreisbogen, $\overline{AB}$: Kreissehne



γ, γ': Peripheriewinkel (Umfangswinkel) auf dem Bogen b

δ, δ': Peripheriewinkel auf dem Ergänzungsbogen b'

α Zentriwinkel (Mittelpunktswnkel)
Zu jedem Kreisbogen gehört ein Zentriwinkel

Alle Peripheriewinkel auf dem gleichen Bogen sind gleich gross.

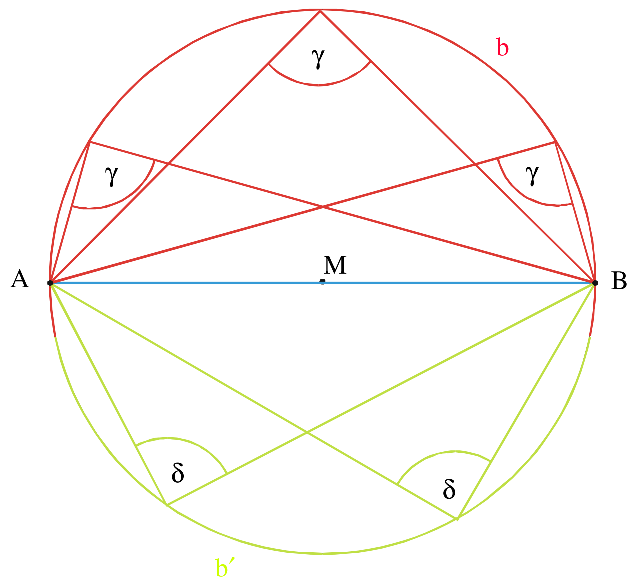
Ein Peripheriewinkel ist halb so gross wie der zum Ergänzungsbogen gehörende Zentriwinkel:

$$\gamma = \frac{\alpha}{a}$$

Ein Peripheriewinkel und ein solcher auf dem Ergänzungsbogen ergeben zusammen:
$\gamma + \delta = 180°$

Satz von Thales

b : Kreisbogen, $\overline{AB}$: Kreissehne



M Der Mittelpunkt der Kreises liegr aif der Kreissehne $\overline{AB}$.

γ Liegt der Punkt C des Dreiecks auf dem Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$, so ist der $\angle ACB = 90°$.

δ Hat das Dreieck ACB bei C einen rechten Winkel, so liegt C auf dem Kreis über $\overline{AB}$.

$\gamma = \delta$ Alle Winkel unter dem Thaleskreis sind $90°$.

Weitere Formulierungen:

Der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus die Strecke $\overline{AB}$ unter einem rechten Winkel gesehen wird, ist der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$.

Bildet man über der Sehne $\overline{AB}$, die durch den Mittelpunkt M geht, einen Kreisbogen mit dem Durchmesser $\overline{AB}$, so sind alle Dreiecke under dem Kreisbogen (Thaleskreis, b oder b') rechtwinklig.

3.4.1.4 Formelsammlung Dreiecke

Winkelsumme im unregelmässigen Dreieck
Die Summe der Innenwinkel ergibt den gestreckten Winkel:

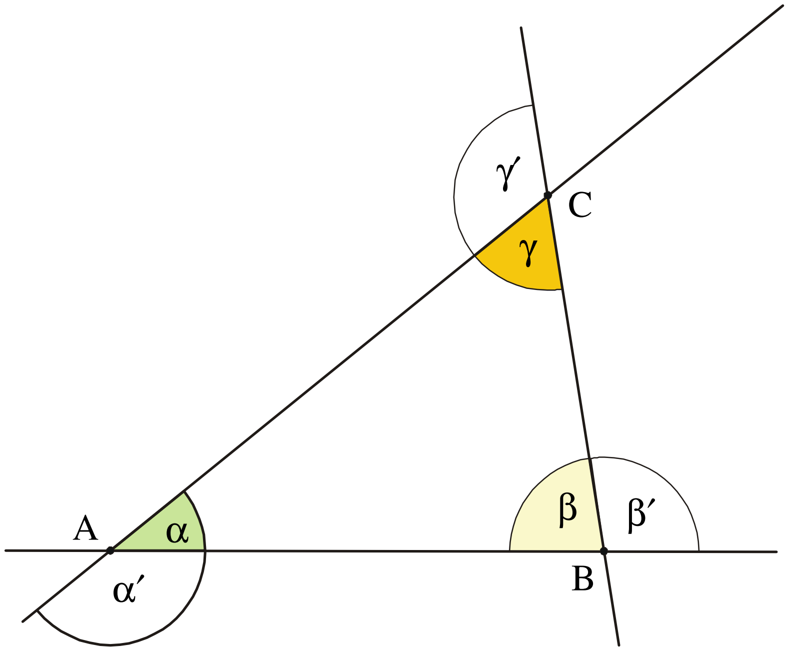
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Ein Aussenwinkel ist gleich der Summe der beiden nicht abliegenden Innenwinkel:

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

Die Summe zweier Dreieckseiten muss kleiner sein, als die dritte Seite.

Der kleinsten Seite liegt der kleinste Winkel gegenüber. Im vorliegenden Beispiel ist dies α.

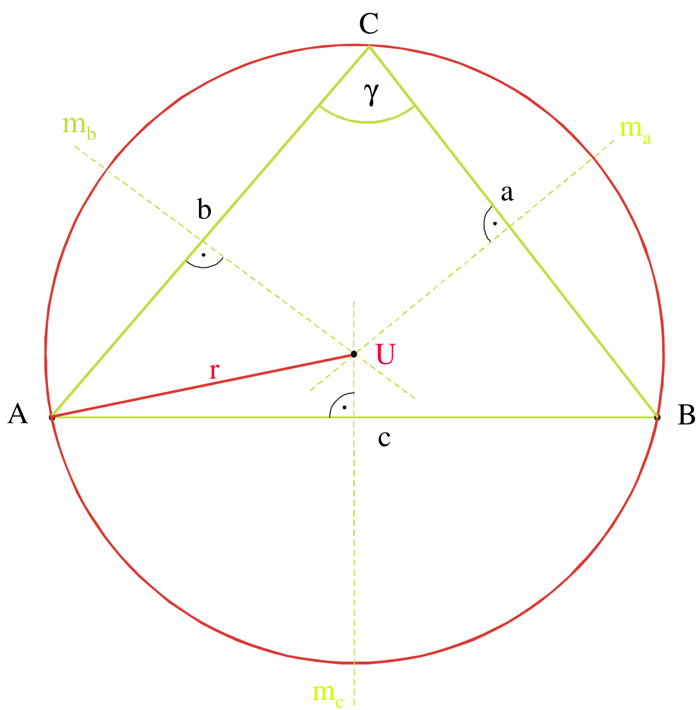


Mittelsenkrechte und Umkreis
Die drei Mttelsenkrechten schneiden einander im Umkeismittelpunkt (U):

$$m_a \cap m_b \cap m_c = \{U\}$$

r_U : Umkreisradius

$\cap$: und
$\{ \}$: Schnittmenge



Winkelhalbierende und Inkreis

Die drei Innenwinkelhalbierenden schneiden einander im Inkeismittelpunkt (I):

$$w_a \cap w_b \cap w_c = \{I\}$$

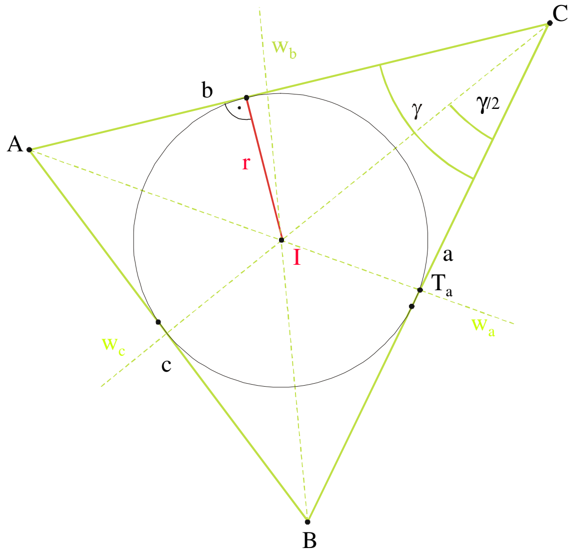
r_I : Inkreisradius

Eigenschaft der Winkelhalbierenden:

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{T_a B} : \overline{T_a C}$$

$\cap$: und

$\{ \}$: Schnittmenge



Hohen im Dreieck

Die drei Höhen im Dreieck schneiden sich im Höhenschnittpunkt (H).

$$h_a \cap h_b \cap h_c = \{H\}$$

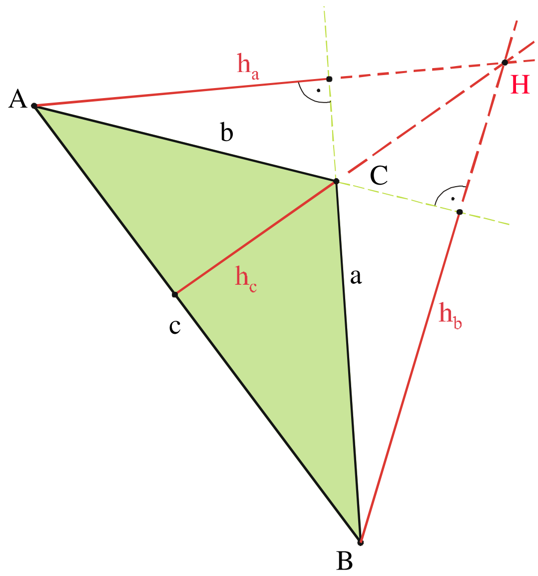
Eigenschaft der Höhen:

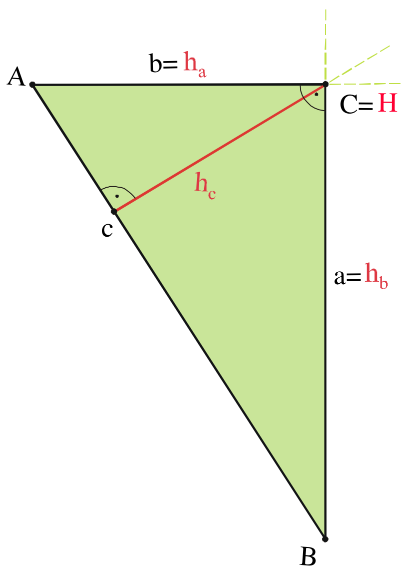
$$h_a : h_b = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$$

Flächeninhalt

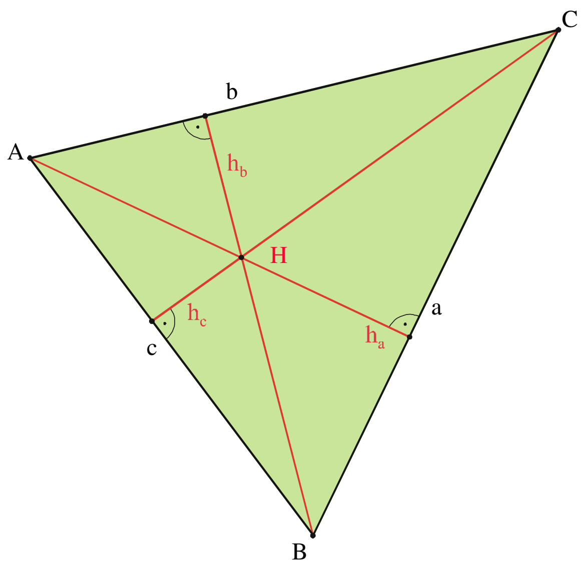
$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Stumpf-
winklig





Rechtwinklig

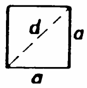


Spitz-
winklig

3.4.1.5 Formelsammlung Flächenlehre (Planimetrie)

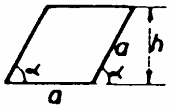
$A = Fläche$ $U = Umfang$ $\pi = 3{,}14159.....$

Quadrat



$A = a^2$ $U = 4 \cdot a$ $d = a \cdot \sqrt{2}$

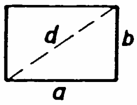
Rhombus oder Raute



$A = a \cdot h$ $A = a^2 \cdot \sin\alpha$ $U = 4 \cdot a$

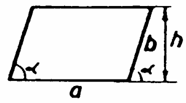
$h = a \cdot \sin\alpha$ $d_{AC} = 2 \cdot a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$

Rechteck



$A = a \cdot b$ $U = 2 \cdot (a + b)$ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Rhomboid (Parallelogramm)

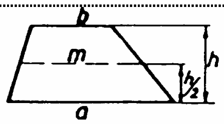


$A = a \cdot h$ $A = a \cdot b \cdot \sin\alpha$ $U = 2 \cdot (a + b)$

$h = b \cdot \sin\alpha$ $d_{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$ [1]

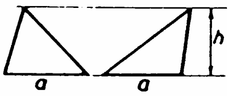
[1] Kosinussatz

Trapez



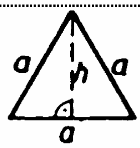
$A = \frac{a + b}{2} \cdot h$ $A = m \cdot h$ $m = \frac{a + b}{2}$

Dreieck (Allgemein)



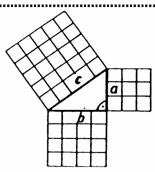
$A = \frac{a \cdot h}{2}$

Gleichseitiges Dreieck



$A = \frac{a \cdot h}{2}$ $A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ $U = 3 \cdot a$ $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$

Rechtwinkliges Dreieck



$A = \frac{a \cdot h}{2}$ $U = a + b + c$

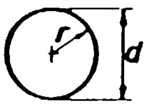
Pythagoreische Lehrsatz:

$c^2 = a^2 + b^2$

$a;b = Katheten$

$c = Hypotenuse$

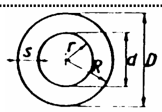
Kreis



$A = r^2 \cdot \pi$ $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$ $U = 2 \cdot r \cdot \pi$

$r = \frac{d}{2}$ $d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}}$

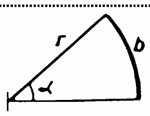
Kreisring



$A = (R^2 - r^2) \cdot \pi$ $A = \frac{(D^2 - d^2) \cdot \pi}{4}$ $A = (d + s) \cdot s \cdot \pi$

$s = R - r$ $s = \frac{D - d)}{2}$

Kreissektor



$A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha°}{360°}$ $A = \frac{b \cdot r}{2}$

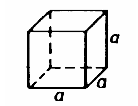
$b = \frac{d \cdot \pi \cdot \alpha°}{360°}$ $b = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha°}{180°}$

3.4.1.6 Formelsammlung Körperlehre (Stereometrie)

$A = Grundfläche$ $M = Mantelfl.$ $O = Oberfläche$

$V = Volumen$

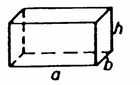
Würfel



$V = A \cdot h$

$O = 6 \cdot a^2$

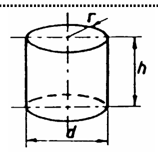
Quader



$V = A \cdot h$ $A = a \cdot b$

$O = 2(A + ah + bh)$

Kreiszylinder



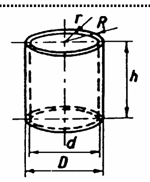
$V = A \cdot h$ $A = r^2 \cdot \pi$

$O = 2 \cdot A + M$ $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

$M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$

$M = d \cdot \pi \cdot h$

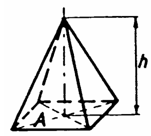
Hohlzylinder



$V = A \cdot h$ $A = (R^2 - r^2) \cdot \pi$

$A = \frac{(D^2 - d^2) \cdot \pi}{4}$

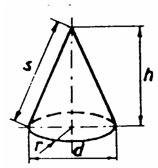
Pyramide



$V = \frac{A \cdot h}{3}$

$O = A + M$

Kreiskegel



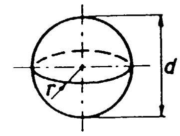
$V = \frac{A \cdot h}{3}$ $A = r^2 \cdot \pi$

$O = A + M$ $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

$s = Mantellinie$ $M = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot s}{2}$

$M = r \cdot \pi \cdot s$

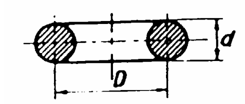
Kugel



$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$ $O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$

$V = \frac{d^3 \cdot \pi}{6}$ $O = d^2 \cdot \pi$

Kreisring



$V = d^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D \cdot \pi$ $O = d \cdot \pi \cdot D \cdot \pi$

$V = d^2 \cdot D \cdot \frac{\pi^2}{4}$ $O = d \cdot D \cdot \pi^2$

3.4.2 Die Grundgebilde

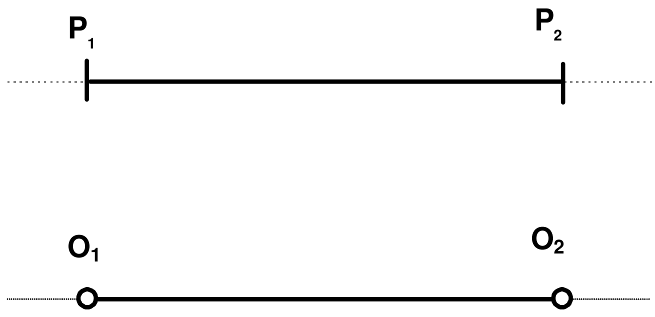
Die Geometrie, und insbesondere die Flächenlehre, baut sich auf drei Grundgebilden auf, nämlich:

- **Punkt**
- **Linie**
- **Gerade**
- **Strecke**
- **Strahl**
- **Fläche**

Ein weiteres Grundgebilde ist der **Körper** ; damit haben wir aber das Gebiet der Flächenlehre bereits verlassen. Die Berechnung von Körpern ist Aufgabe des zweiten Teilgebietes der Geometrie, nämlich der **„Stereometrie“** Stereometrie heisst wörtlich Raummessung.

3.4.2.1 Der Punkt

In der Flächenlehre haben wir es also nur mit Punkten, Linien und Flächen zu tun. Der **Punkt** ist das einfachste geometrische Gebilde.
Eigentlich kann man sich einen Punkt nur denken, denn er hat ja - streng genommen - überhaupt keine Abmessungen; er besitzt weder eine Länge, noch eine Breite, noch eine Höhe. Wir drücken das mathematisch so aus:



Ein Punkt hat die Dimension „Null“

(„Dimension“ ist ein Fremdwort für „Abmessung“ oder „Ausdehnung“)

Punkte, die zu einer Linie gehören, werden mit Hilfe kurzer Querstriche oder kleiner Kreise angegeben (siehe die Punkte P_1 und P_2 oder 0_1 und 0_2 in obiger Abbildung). Auch Mittelpunkte von Kreisen werden oft durch kleine Kreise (Nullenkreise) markiert, wobei der eigentliche Punkt der Mittelpunkt des Kreises ist.

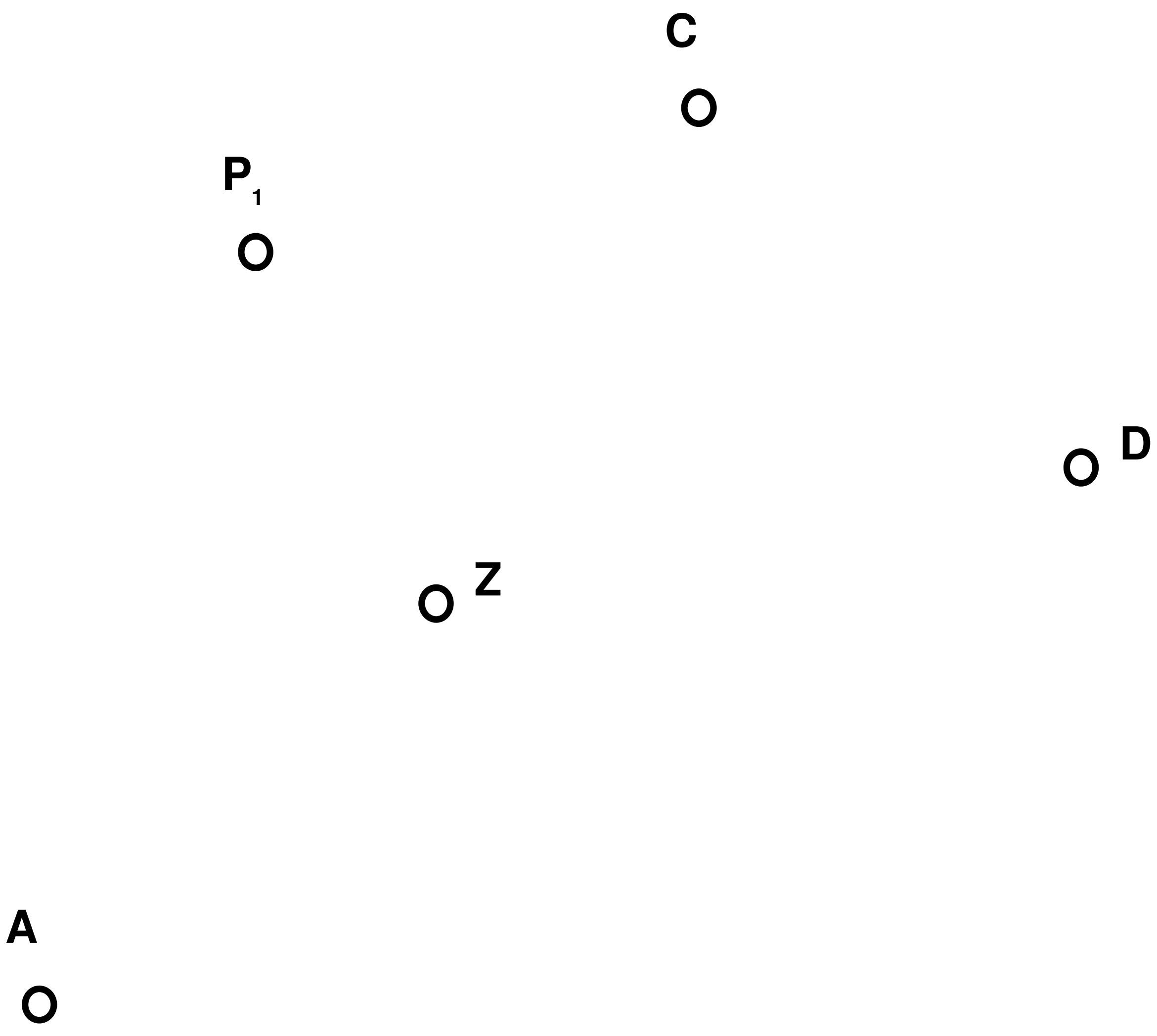
3.4.2.2 Die Linien

Das Wort „Linie“ stammt vom lateinischen Wort „Linea“ und bedeutet „Faden, Schnur“.

Eine Linie entsteht, wenn sich ein Punkt

bewegt.

Da der Punkt ja keine Ausdehnung besitzt, so hat auch die **Linie nur eine Längenausdehnung** aber keine Breitenausdehnung



3.4.2.3 Die Gerade

Die Orte A und B sollen durch eine Eisenbahnlinie verbunden werden.

Bei der Geraden spielen Anfangs- und Endpunkt keine Rolle.

Die Gerade ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte.

Die Gerade hat nur eine Längenausdehnung.

3.4.2.4 Die Strecke

Die Strecke ist - wie der Name sagt - eine gestreckte, also eine gerade Linie.

Die Strecke ist die kürzeste Abstand zweier Punkte.

Die Strecke ist ein Teil einer Gerade, die durch die Endpunkte begrenzt ist.

Strecken spielen im alltäglichen Leben eine wesentliche Rolle. Nachfolgend ein paar Beispiele:

- **Massstäbliches Arbeiten nach Lageplan**
- **Einstellen von Bohrtiefen**
- **Streckenaufteilungen**
- **Ausmasse**

3.4.2.5 Der Strahl

Ist von einer Geraden nur **Anfangspunkt** ein ,nicht aber der **Endpunkt** gegeben, so heisst dieser Teil der Geraden **Strahl**.

Nachfolgend ein paar Beispiele:

- **Sonnenstrahl**
- **Lichtstrahl**
- **Schallstrahl**
- **Funkstrahl**

3.4.2.6 Die Fläche

Bei der Fläche werden die Betrachtungen über zwei Ausdehnungen erfolgen, nämlich:

- **Längenausdehnung**
- **Breitenausdehnung**

Spielen die Grössen der Ausdehnung keine Rolle, so spricht man von der

____

Eine Fläche ist demnach ein begrenztes Stück

Ebene

Auch der Polymechaniker hat in seiner Praxis vielfältig mit Flächen zu arbeiten.

- **Rissdarstellungen von Werkstücken**
- **Querschnitte aller Art**

3.4.2.7 Die Körper

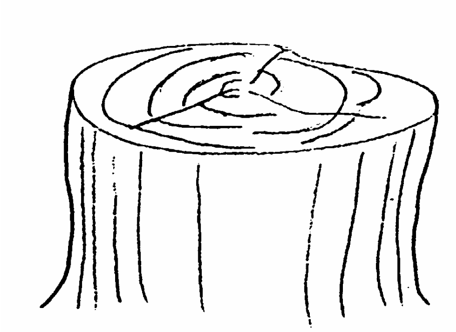
Mit dem Wort „Körper“ bezeichnen wir nicht nur den Leib des Menschen oder des Tieres, sondern jedes Ding, jeden Gegenstand. Seine Ausdehnung lässt sich nach drei verschiedenen Richtungen feststellen:

- **Längenausdehnung**
- **Breitenausdehnung**
- **Höhen- oder Tiefenausdehnung**

Die Farbe, Härte, Dehnbarkeit etc. der Körper bleibt in der Raum1ehre unberücksichtigt, denn was interessiert sind:

- **Gestalt (Form)**
- **Grösse**

Aufgabe



Gegeben ein Körper

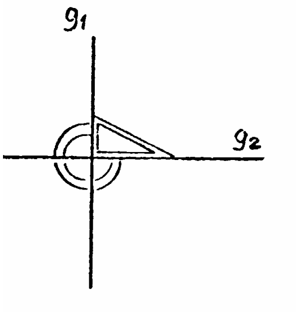
Schneidet man den Körper so erhält man **eine Fläche.**

Schneiden Sie das Schnittbild und Sie erhalten eine **eine Gerade.**

Schneiden Sie das Schnittbild No. 2 und Sie erhalten einen **Punkt.**

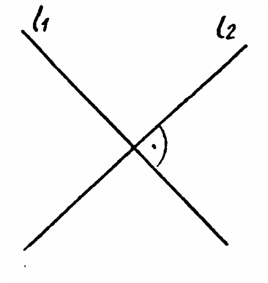
3.4.3 Begriff der Lage

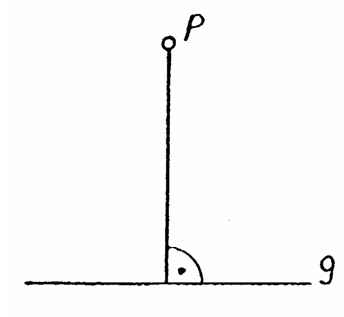
3.4.3.1 Waagrecht, senkrecht, lotrecht und parallel



Schneiden sich ein waagrechte und eine senkrechte Linie, so stehen sie rechtwinklig zueinander und bilden so vier lückenlos aneinander anschliessende Winkel

Senkrecht bedeutet aber auch, wenn auf eine Gerade in beliebiger Lage die „Senkrecht" errichtet werden soll.



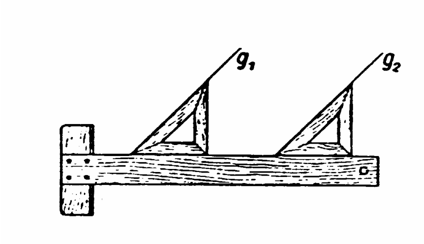


Soll z.B. zwischen einem Punkt und einer Geraden der kürzeste Abstand ermittelt oder gebildet werden, so spricht man auch vom lotrechten Abstand oder einfach „das Lot"

Für den Handwerker ist eindeutig klar, was er unter parallel oder gleichlaufenden Geraden zu verstehen hat. Das entscheidende Merkmal der Parallelität von Geraden ist der

____

Abstand.



(Schon im ersten Schuljahr helfen dem Schulanfänger die vorgezeichneten Parallelen, beim Schreiben gleiche Abstände einzuhalten).

3.4.3.2 Winkel

Zieht man von einem Punkt C aus zwei **Strahlen** so entsteht ein Winkel. Die Winkel werden allgemein mit griechischen Kleinbuchstaben bezeichnet (siehe Einleitung).

Die gegebenen zwei Winkel γ und α werden wie folgt beschrieben:

Der $\sphericalangle\ \gamma$ ist gleich $\sphericalangle$ ACB

Der $\sphericalangle\ \alpha$ ist der Scheitelwinkel

Scheitelwinkel sind gleich gross

$\sphericalangle$ = Winkel

Die wichtigsten Winkelbezeichnungen seien hier erwähnt:

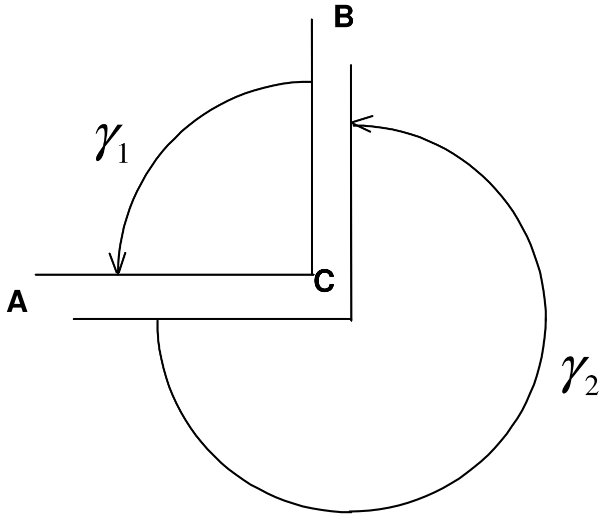
α	**Alpha**	δ	**Delta**
β	**Beta**	λ	**Lambda**
γ	**Gamma**	μ	**My**

3.4.3.3 Mass des Winkels

Zur Messung von Grössen (hier Winkeln) muss man Masse haben. Als Winkelmass gilt die Drehung eines

____

und als Mass die bei der Drehung überstrichene Fläche z.B. in Umdrehungen.



Als mass der Winkel wird in der Praxis nicht die volle Umdrehung, sondern die nachfolgenden Winkelbezeichnungen verwendet:

Winkelart	Abkürzung	Winkelbereich	Bemerkung
• **Altgrad D**	**(DEG)**	**0° bis 360°**	**Grad Masseinheit aus der Geometrie**
• **Radiant R**	**(RAD)**	**0 bis 2π**	**Masseinheit aus der Physik: Mechanik und Elektrotechnik**
• **Neugrad G**	**(GON)**	**0g bis 400g**	**Masseinheit aus der Vermessungstechnik** **1 Gon = 100 Neuminuten**

Sind kleine Winkelgrössen zu bestimmen, wie z.B. bei Feldmessungen oder noch mehr bei astronomischen Messungen, muss der Winkel noch weiter unterteilt werden. Es gelten für die Kleineren Winkelbezeichnungen folgende Regeln.

Altgrad

Grad	Minuten	Sekunden
1°	60’	
	1’	60’’
1°	60’	3600’’

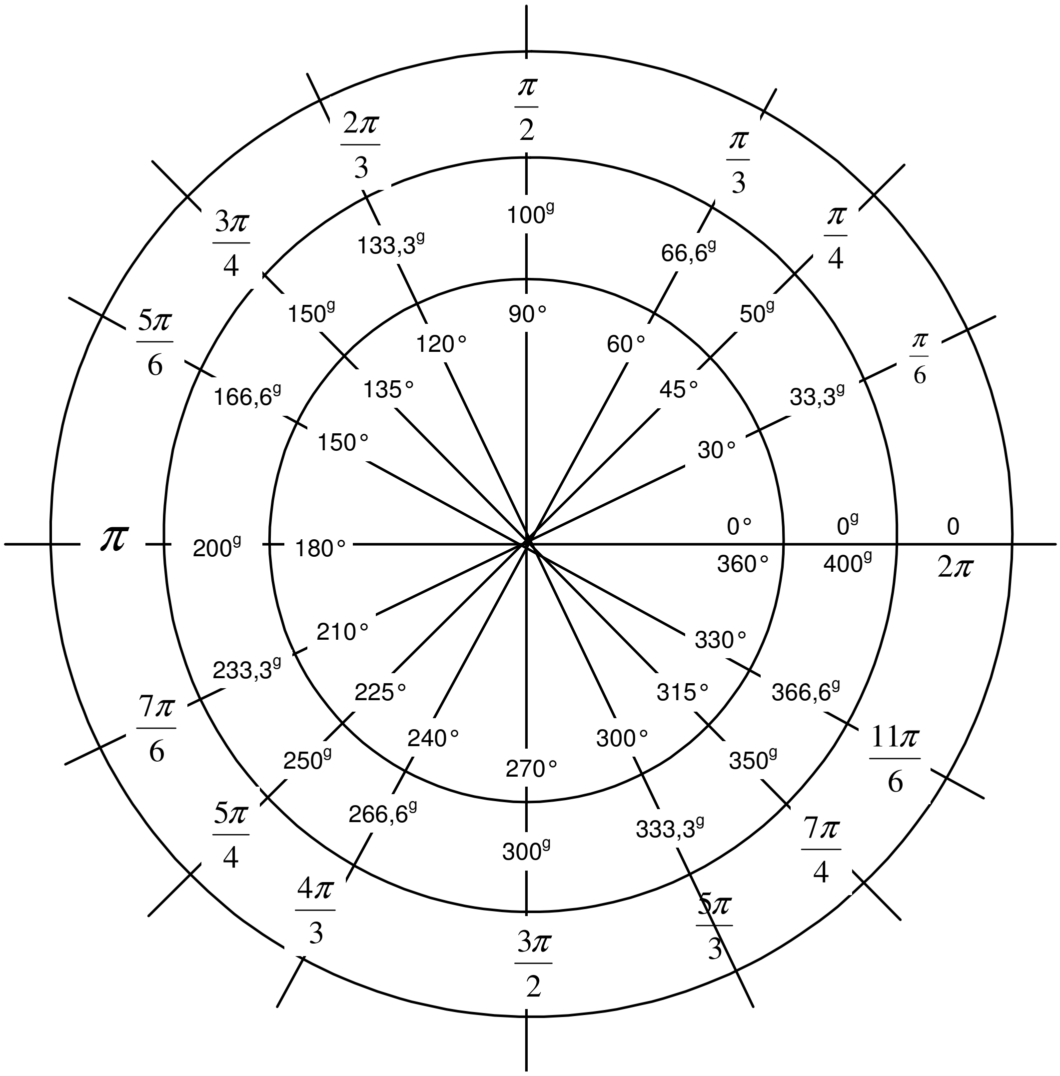
Neugrad

Neugrad	Neuminuten	Neusekunden
1^g	100^c	
	1^c	100^{cc}
1^g	100^c	10000^{cc}

Die Umrechnung von Neugrad in Altgrad und umgekehrt erfolgt mit folgender Beziehung:

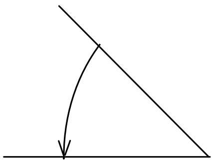
1°	$\triangleq$	**1,111g**
1g	$\triangleq$	**0,9°**

Zeichnen Sie drei ineinander liegende Kreise und teilen sie je einen Kreis mit den gelernten Winkelarten ein!

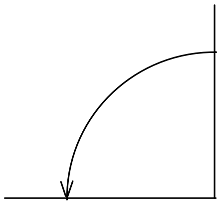


3.4.3.4 Winkelbezeichnungen

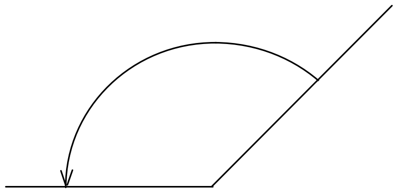
Wir werden für die weiteren Betrachtungen die Winkel wie folgt bezeichnen:



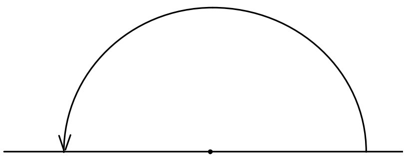
Spitzer ∡
0° - <90°



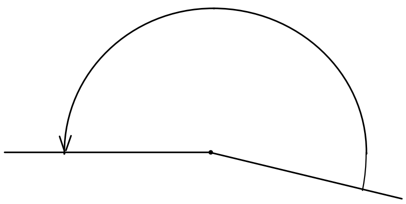
Rechter ∡
90°



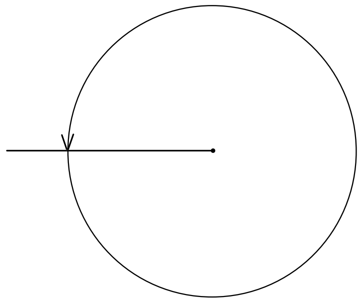
Stumpfer ∡
>90° - 180°



Gestreckter ∡
180°



Erhabener ∡
>180° - <270°

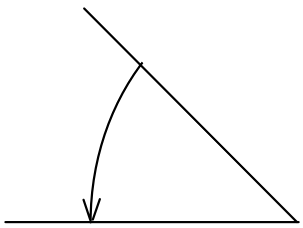


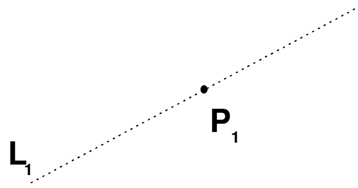
Voll ∡
360°

3.4.3.5 Winkelkonstruktionen

3.4.3.5.1 Winkel Übertragung

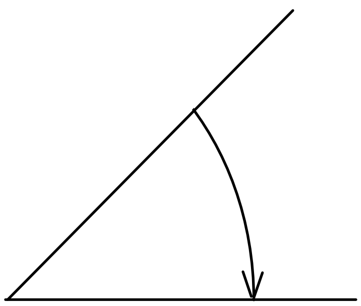
Der gegebene Winkel soll durch Konstruktion in den Punkt 1 und zur Line 1 übertragen werden.





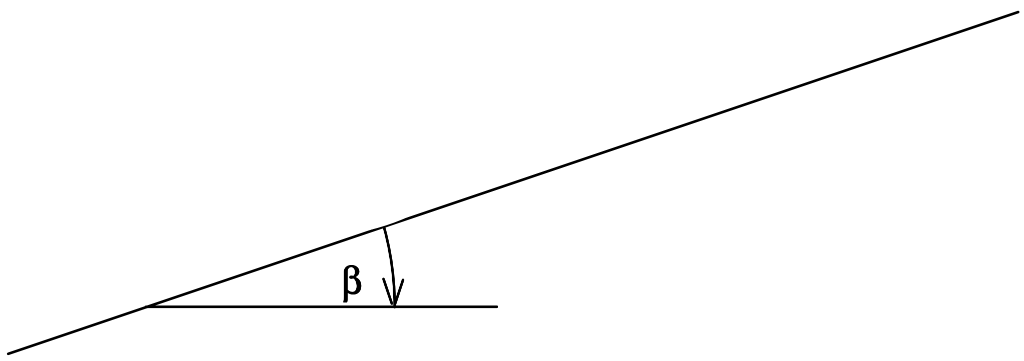
3.4.3.5.2 Winkel Halbierung

Der gegebene Winkel soll durch Konstruktion halbiert werden. Der Halbe Winkel β soll mit einem Transporteur gemessen werden.



3.4.3.5.3 Winkel in Beziehung aufeinander

Der Böschungswinkel β sollte gemessen werden. Er ist aber unzugänglich. Wie könnte er trotzdem bestimmt werden?



Füll- oder Komplementwinkel sind zwei Winkel, die zusammen 90° betragen.

Ergänzungs- oder Supplementwinkel sind zwei Winkel, die zusammen 180° betragen.

Je zwei gegenüberliegende Winkel sind Scheitelwinkel.
Scheitelwinkel sind gleich gross.

3.4.4 Kongruenz

Lateinisch: „congruens“ bedeutet:

- **Sich decken, deckungsleich**
- **Übereinstimmen, passend**
- **Zusammenfallen**

Praktische Anwendung beim Reproduktionsverfahren:

- **Photokopieren**
- **Lichtpauseverfahren**
- **Umdruckverfahren**

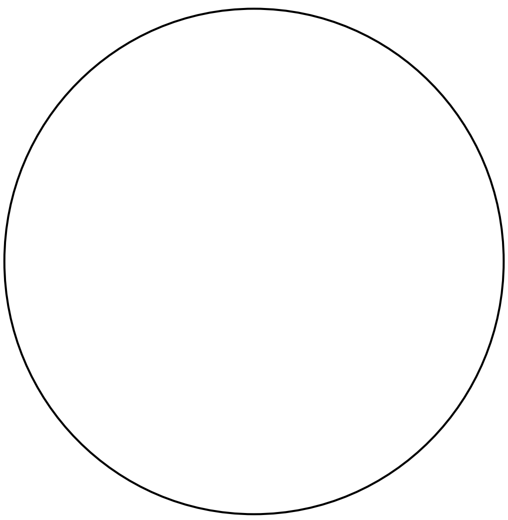
3.4.4.1 Kongruente Kreise

Der Kreis 1 soll möglichst genau unter Position 2 übertragen werden. Nur wenn beim Kreis 1 der Radius bestimmt werden kann, ist eine befriedigende Übereinstimmung (**Kongruenz**) der beiden Kreise gewährleistet.

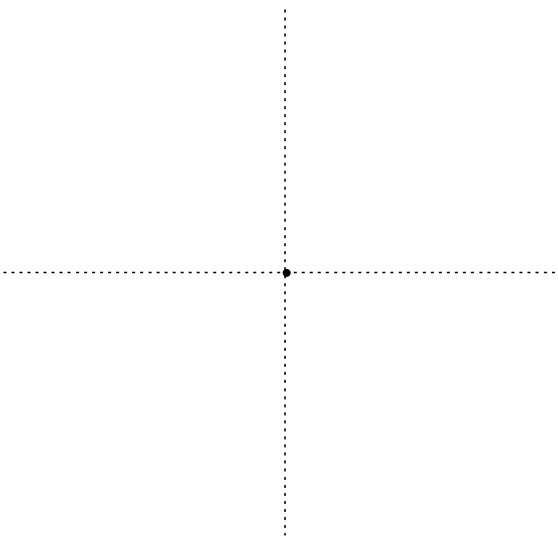
Konstruktion Radius Kreis 1

1. **Einzeichnen zweier Sehnen**
2. **Sehnen halbieren**
3. **Mittelsenkrechte einzeichnen**
4. **Radius abmessen**
5. **Kreis unter Pos. 2 einzeichnen**

Pos. 1

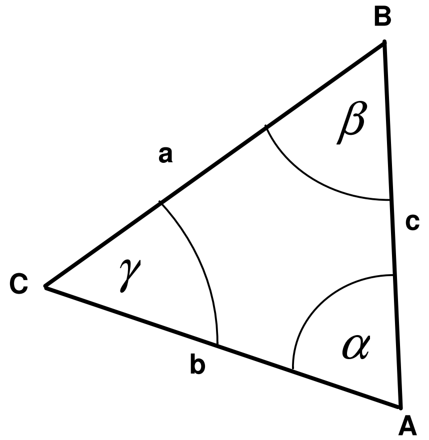


Pos. 2



3.4.4.2 Kongruente Dreiecke

Die Bezeichnungen am Dreieck



Eckpunkte	**A,B,C**
Seiten	**a,b,c**
Winkel	α,β,γ

Es gilt nun die vier Kongruenzsätzen zu analisieren, bei welchen Bedingungen zwei Dreiecke „deckungsgleich“ (Kongruent) sind:

3.4.4.3 Der dritte Kongruenzsatz

Wir versuchen das gegebene **ABC** möglichst einfach zu übertragen.

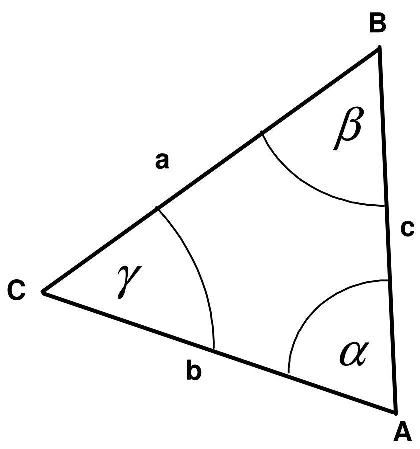


Bild 1

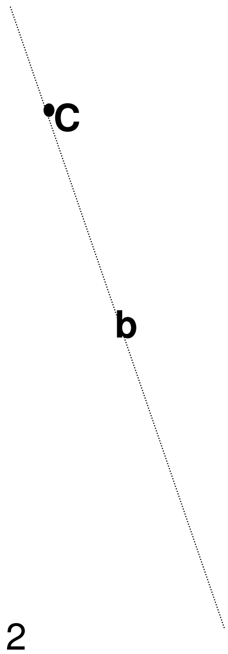


Bild 2

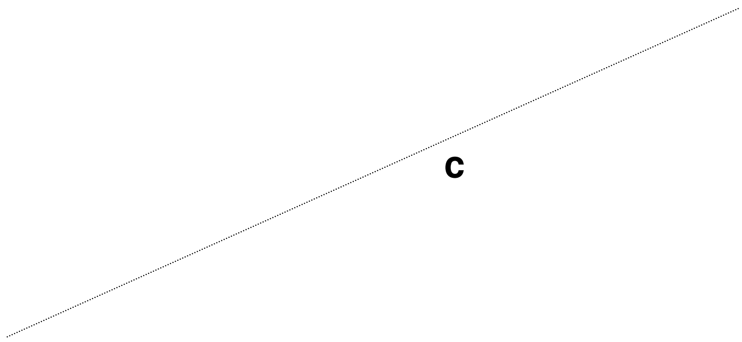
Konstruktion Dreieck Bild 2

1. $\overline{CA}$ abtragen
2. Von C aus a abtragen und von A aus c abtragen

Dritter Kongruenzsatz

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge der drei Seiten übereinstimmen.

Zeichnen Sie zwei Dreiecke!
Dreieck 1: $a=4cm$, $b_1=6cm$, $c=8cm$
Dreieck 2: $a=4cm$, $b_2=3cm$, $c=8cm$



Bemerkung:

Wenn die Summe der
beiden kleineren Seiten
kleiner oder gleich
der grösseren Seite
beträgt, ist keine
Dreieckskonstruktion
möglich!

Sind Dreiecke, die nur mit den Winkeln übertragen werden, auch kongruent?

Begründung:

Dreiecke welche nur
mit Winkeln abgetragen
werden sind nicht
kongruent!

Skizzieren Sie zwei Dreieck mit den Winkeln:
$\alpha=30°$, $\beta=60°$, $\gamma=90°$

3.4.4.4 Der zweite Kongruenzsatz

Versuchen Sie, ein Dreieck nach folgenden Angaben zu zeichnen:

1. **Zeichnen Sie die Streche $\overline{AB}$ =c = 4cm**
2. **Tragen Sie in A den Winkel α= 120° ein**
3. **Winkel in B, also β= 40°**

Konstruktion:

Bemerkung:

Dreiecke können mit

diesen Angaben

eindeutig konstruiert

werden.

Es liegt also Kongruenz

vor!

Zweiter Kongruenzsatz

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge

einer Seite und den der gegebenen Seite

anliegenden Winkel übereinstimmen.

3.4.4.5 Der erste Kongruenzsatz

Nach den beiden behandelten Lehrsätzen können wir uns jetzt kurz fassen.

Erster Kongruenzsatz

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei

Seiten und dem eingeschlossenen Winkel

übereinstimmen.

$\overline{AC}$ =5cm
$\overline{BC}$ =12cm
$\measuredangle \gamma$=50°

Einschränkung:

Der eingeschlossene

Winkel muss stets

kleiner sein als

180°

3.4.4.6 Der vierte Kongruenzsatz

Konstruieren Sie ein Dreieck aus a= 10cm, b=6cm und α=75°

Aus der Konstruktion folgt:

Der vierte Kongruenzsatz

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Winkel, der der grösseren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen.

Konstruieren Sie ein Dreieck aus a=5cm, b=3cm und β=100°

Bemerkung:

Es ist keine Lösung möglich, da $\sphericalangle\beta$ zu gross oder Seite b zu klein ist.

Keine Kongruenz!

Konstruieren Sie ein Dreieck aus a=8cm, b=6cm und β=40°

Bemerkung:

Zwei Lösungen vorhanden.

Keine Kongruenz!

3.4.5 Symmetrie

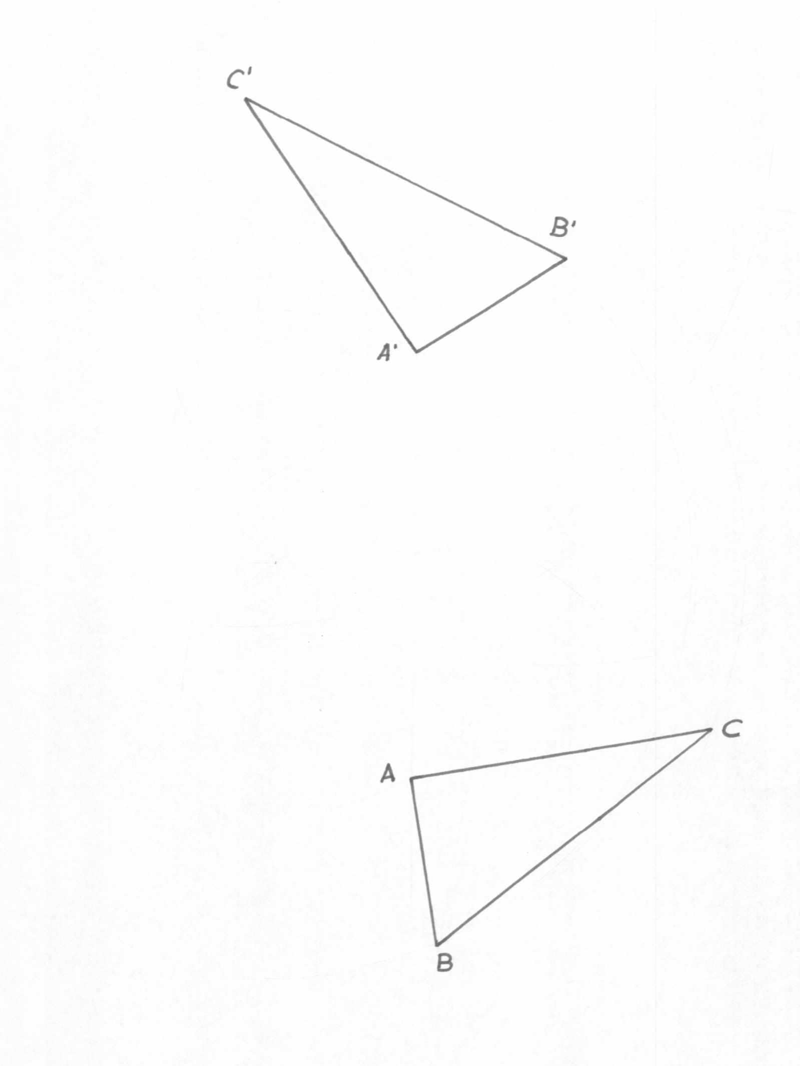
3.4.5.1 Drehsymmetrie

Wird ein Gegenstand (Strahl, Ebene oder Körper), der seinen Ausgangspunkt beibehält, gedreht und wieder aufgezeichnet, so entsteht eine Figur die man Bild nennt.

S=Zentrum
∢α=Drehwinkel
△ABC=Gegenstand
△A'B'C'=Bild

Aufgabe 5.1
Zeichnen Sie ein Dreieck ABC. Das Zentrum S soll ausserhalb des Dreiecks liegen. Drehen Sie jeden Punkt im gleichen Winkel um das Zentrum S.

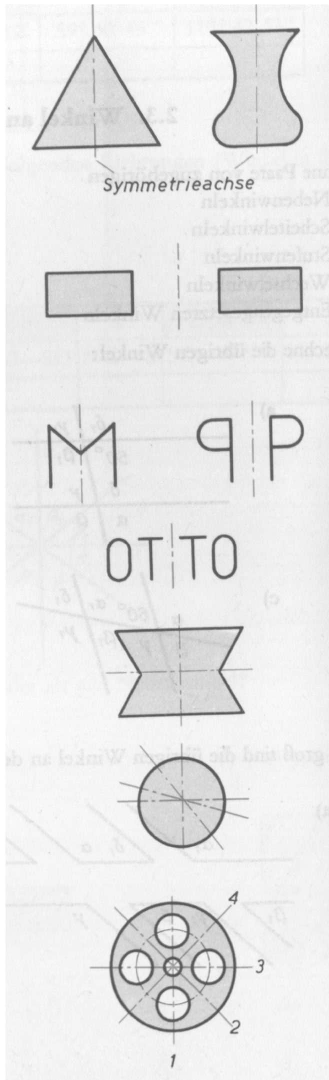
Gegeben sind zwei Dreiecke ABC und A'B'C', die durch Drehung um das unbekannte Drehzentrum S entstanden sind. Konstruieren Sie das Zentrum S!



Beobachtung:

3.4.5.2 Achsensymmetrie

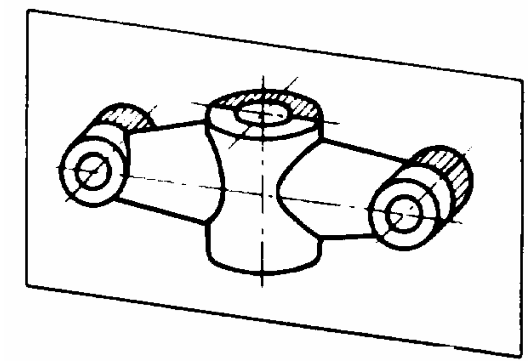
Eine Ebene Figur heisst symetrisch, wenn sie durch eine Gerade in zwei spiegelbildliche gleiche Hälften zerlegt werden kann.
Die Gerade oder Faltkante heisst **Symmetrieachse**. Wird die Figur um die Symmetrieachse gefaltet, so decken sich beide Hälften. Die Punkte und Strecken der Figur, die nach der Umwendung zusammenfallen, heissen **achsensymetrische Punkte** und **achsensymetrische Strecken**.



Jede Mittelsenkrechte ist Symmetrieachse für eine Strecke

Jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Strecke hat von den Endpunkten der Strecke den gleichen Abstand.

3.4.5.3 Ebenensymmetrie



Ein Körper heisst ebenensymetrisch, wenn man ihn durch eine Ebene (Symmetrieebene) in zwei Teile zerlegen kann, von denen der eie Teil das Spiegelbild des anderen ist.
Manche Körper besitzen auch zwei und mehrere Symmetrieebenen, eine Kugel unendlich viele.

3.4.6 Das Dreieck

3.4.6.1 Winkel am Dreieck

Die einfachste geradlinige planimetrische Figur ist das Dreieck. Ein Dreieck ist eine von drei Seiten begrenzte Fläche.

A,B,C ______________________

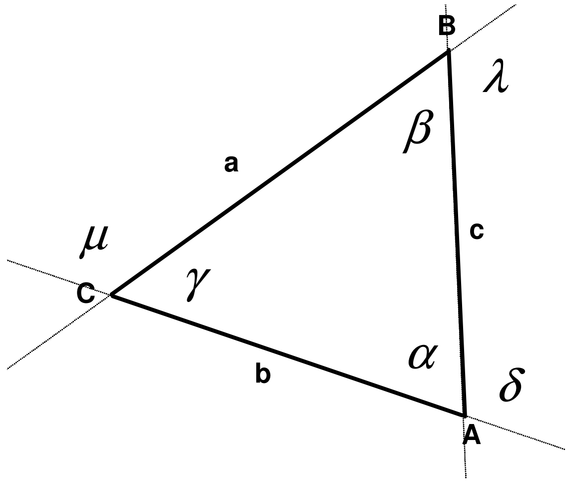
a,b,c ______________________

α,β,γ ______________________

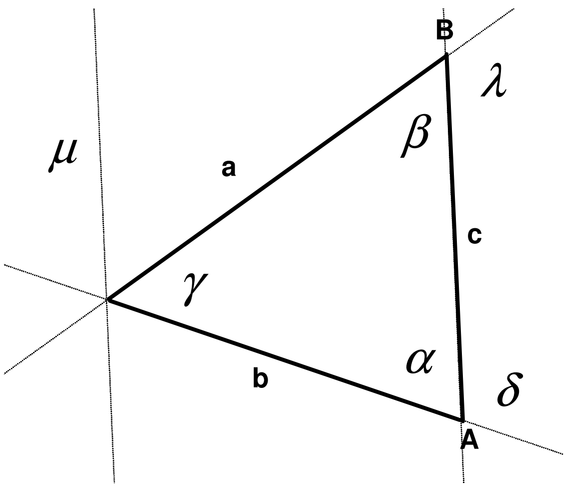
δ,λ,μ ______________________

____

____



Zeichnen Sie die Scheitelwinkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ in das obenstehende Dreieck ein!



Wie gross ist die Summe der Innenwinkel? Beweisen Sie dies!

3.4.6.2 Die Hilfslinien des Dreiecks

3.4.6.2.1 Mittelsenkrechte im Dreieck

Zeichnen Sie ein Dreieck aus a=7,5cm; b=6,5cm; c=9cm; und errichten Sie auf allen Seiten die Mittelsenkrechte.

Welche Besonderheit tritt auf?

Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt (M).

Messen Sie die Entfernung vom Schnittpunkt zu den Ecken!

Der Schnittpunkt M ist von den Ecken gleich weit entfernt. Man nennt die Entfernung r.

Lehrsatz

Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Umkreis-mittelpunkt M des Dreiecks.

3.4.6.2.2 Höhen im Dreieck

Wo liegen die Höhenschnittpunkte H bei
a) spitzwinkligen Dreiecken,
b) stumpfwinkligen Dreiecken,
c) rechtwinkligen Dreiecken?

Erkenntnis
a)
H liegt innerhalb des Dreiecks bei spitzwinkligen Dreiecken.

b)
H liegt ausserhalb des Dreiecks bei stumpf-winkligen Dreiecken.

c)
H liegt im Scheitelpunkt des Dreiecks bei rechtwinkligen Dreiecken.

3.4.6.2.3 Winkelhalbierende im Dreieck

Zeichnen Sie ein Dreieck und halbieren Sie die Innenwinkel. Welche Besonderheit tritt auf?

Die Winkelhalbierenden schneiden sich im Punkt (O).

Fällen Sie vom Schnittpunkt O der Winkelhalbierenden die Lote auf die Seiten des Dreiecks und messen Sie die Länge der Lote.

Erkenntnis

Die Lote sind gleich Lang.

Lehrsatz

Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Innenkreis-mittelpunkt O des Dreiecks.

3.4.6.2.4 Seitenhalbierende

Aufgabe 6.16

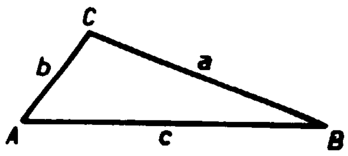
Zeichnen Sie ein Dreieck, und verbinden Sie seine Ecken mit den Mitten der entsprechenden Gegenseite. Welche Besonderheit tritt auf? Messen Sie die Abschnitte der sich schneidenden Verbindungslinien.

Die Verbindungslinien schneiden sich in einem Punkt (S).

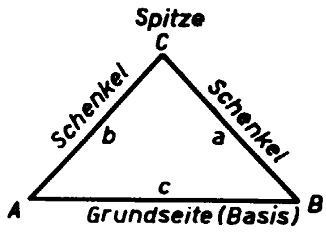
Lehrsatz

Die drei Seitenhalbierenden (Schwerlinien) eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem Schwerpunkt S. Der Schwerpunkt ist von den Seitenmitten halb so weit entfernt wie von den gegenüberliegenden Ecken. (Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1)

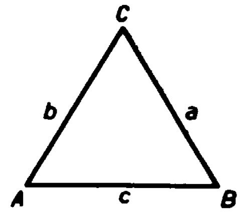
3.4.6.3 Arten von Dreiecken



Ungleichseitig



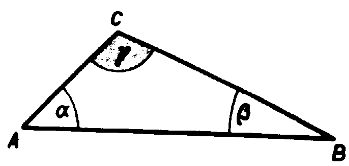
Gleichschenklig



Gleichseitige

Spitzwinklig

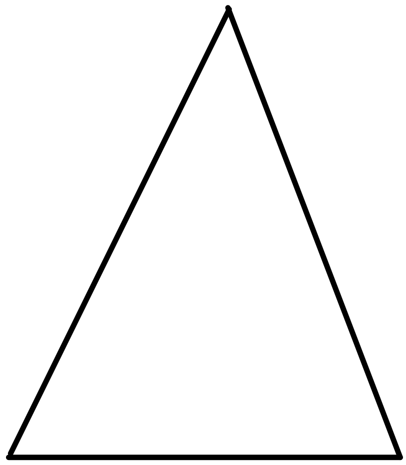
Rechtwinklig



Stumpfwinklig

3.4.6.4 Die Flächenberechnung

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist halb so gross wie der Inhalt des Parallelogramms. Der Inhalt dieses Vierecks ist gleich gross wie der Inhalt des Rechtecks



Die Fläche des Dreiecks ist die Hälfte davon also:

3.4.6.5 Das rechtwinklige Dreieck

Konstruktionen von ⊾ △

- Zeichnen Sie einen Kreisdurchmesser.
- Schlagen Sie einen Kreisbogen über ihn.
- Zeichnen Sie ein Dreieck unter dem Halbkreis mit dem Durchmesser als eine Seite.

Konstruktionen von ⊾ △

- Zeichnen Sie ein Rechteck.
- Halbieren Sie das Rechteck mit einer Diagonalen.

Merke
Seitenbezeichnungen des Rechtwinkligen Dreiecks

Seite c .... immer dem ⊾ ....

Seite b .... immer dem ⊾ ....

Seite a .... immer dem ⊾ ....

3.4.6.6 Lehrsatz des Pythagoras

Aufgabe 6.25
Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC aus b=4cm und a=3cm. Errichten Sie auf den Seiten die Quadrate, und teilen sie durch parallele Linien in cm^2 ein. Vergleichen Sie die Quadrate der Katheten mit den Hypotenusenquadraten.

Erkenntnis:

"Alles ist Zahl"

Pythagoras von Samos
(Geboren um 570 v. Christus, † nach 510 v. Chr.),

war ein griechischer Philosoph

Lehrsatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Der Pythagoreische Lehrsatz ist nach dem berühmten griechischen Mathematiker „Pythagoras“ (500 v. Chr.) benannt. Dieser berühmte Lehrsatz ist nicht von Phythagoras gefunden worden, sondern ist viel älter.

3.4.6.7 Lehrsatz des Euklid

Beweise für den Pythagoreischen Lehrsatz gibt es viele. Wir begnügen uns hier mit einem, mit dem Lehrsatz des Euklid.

Aufgabe 6.26

Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC aus a=3cm und b=4cm. Errichten Sie auf den Seiten die Quadrate, und teilen sie durch ihre Verlängerung das Hypotenusenquadrat in zwei Rechtecke aus der Hypotenuse und einem Hypotenusenabschnitt. Die Hypotenusenabschnitte q und p nennt man auch Projektionen der Katheten b und a.

Erkenntnis:

____

____

____

Euklid von Alexandria
war ein griechischer
Mathematiker.

Lehrsatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusen-Abschnitt $a^2 = c \cdot p$ / $b^2 = c \cdot q$

(ca. 365 v. Christus vermutlich in Alexandria oder Athen; † ca. 300 v. Chr.)

3.4.6.8 Satz des Thales

Ist ein Winkel ein Rechter, so heisst die gegenüberliegende Seite Hypotenuse, die beiden anliegenden Seiten Katheten.

Bei einem Winkel $\gamma = 90°$ gilt:

Thales von Milet

„Das Wasser ist das Beste“

Er galt als der älteste der sieben Weisen in der Antike.

Lehrsatz des Thales (Thaleskreis)

Im rechtwinkligen Dreieck liegt der rechte

Auf dem Halbkreis (Umkreis) über der

Hypotenuse.

Umkreisradius:

$$r = \frac{c}{2}$$

Inkreisradius:

$$\rho = \frac{a + b - c}{2}$$

3.4.6.9 Höhensatz

Zeichnen Sie in ein rechtwinkliges Dreieck das Quadrat über der Höhe und das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten q und p. Vergleichen Sie den Inhalt beider Flächen.

Erkenntnis:

Lehrsatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

Höhensatz $h^2 = p \cdot q$

3.4.6.10 Satz des Heron

Gewöhnlich lautet die Flächenformel für das Dreieck $A = \frac{c \cdot h}{2}$.

Es ist aber auch möglich, die Fläche des Dreiecks unmittelbar aus den drei Seiten zu berechnen. Bezeichnet man den Umfang eines Dreiecks mit 2s, so ist der halbe Umfang s.

$$a + b + c = 2s$$

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

Der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks ist dann

Satz des Heron

$$\boxed{A = \sqrt{s(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}$$

Beweis:
Mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes wird die Höhe h des Dreiecks durch die beiden Seiten a und b ausgedrückt.

3.4.6.11 Das gleichseitige Dreieck

Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck von a=5cm.
Die Höhe h ist aus der Seite a zu berechnen.
Mit der Höhe und der Grundlinie berechnen wir die Fläche des Dreiecks.

3.4.6.12 Das gleichschenklige Dreieck

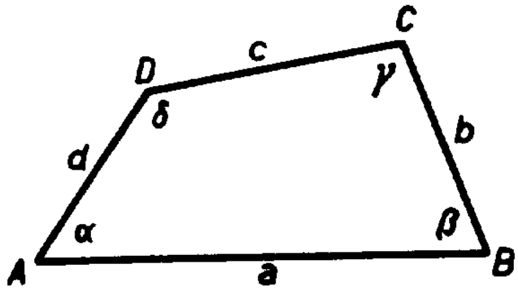
Zeichnen Sie ein gleichschenkliges Dreieck mit der Seite a oder b=7cm und der Seite c=5cm. Die Höhe h ist aus der Seite a zu berechnen. Mit der Höhe und der Grundlinie berechnen wir die Fläche des Dreiecks.

3.4.7 Das Viereck

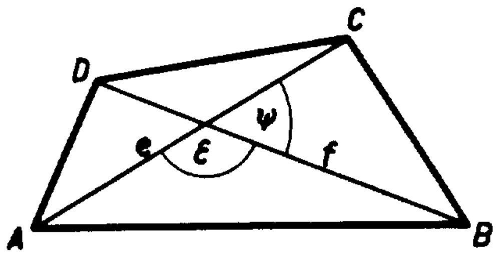
3.4.7.1 Einleitung

Ein Viereck hat vier Seiten
(a, b, c, d)

und vier Winkel.
(α, β, γ, δ)



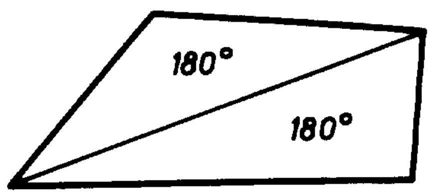
Die 4 Seiten schneiden sich in vier Punkten, Ecken genannt
(A, B, C, D).



Die Verbindungslinien zweier Gegen-ecken heissen

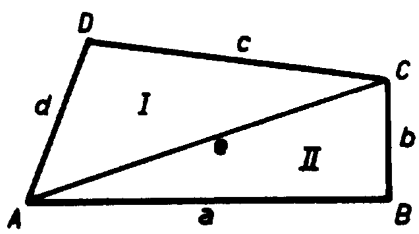
Diagonalen oder Ecklinien

(e, f)



Die Diagonalen schneiden sich und bilden die Winkel
(ε, ψ).

Die Winkel im Viereck betragen
360 Grad.



Das Viereck kann in zwei Dreiecke zerlegt werden und es sind dafür 5 Grössen notwendig.

3.4.7.2 Einteilung der Vierecke

Bei einem unregelmässigen Viereck ist die Lage und Grösse der Seiten beliebig. **allgemeines Viereck**	Ein Viereck, in dem ein Paar Gegenseiten parallel sind (a‖c). **Trapez**	Ein Viereck, in dem je zwei benachbarte Seiten gleich lang sind (a=b und c=d). **Drachen**
Ein Viereck, in dem beide Seitenpaare parallel sind (a‖c und b‖d). **Parallelogramm Rhomboid**		

3.4.7.3 Die Parallelogramme

Ein Viereck, in dem beide Seitenpaare parallel sind (a‖c und b‖d). **Parallelogramm** **Rhomboid**	Ein Parallelogramm mit rechten Winkeln. **Rechteck**	Ein Parallelogramm mit gleichen Seiten. **Raute** **Rombus**
Ein Parallelogramm mit gleichen Seiten und rechten Winkeln. **Quadrat**		

Die Eigenschaften eines Parallelogrammes:

Je 2 Seiten laufen zueinander Parallel.

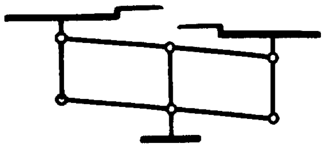
Je 2 Seiten sind gleich lang.

Je 2 gegenüberliegende Winkel sind gleich gross.

Die Summe der Innenwinkel beträgt 360°.

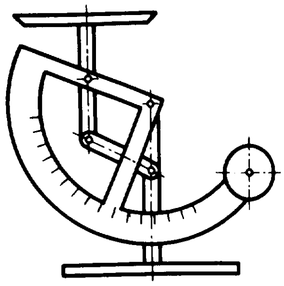
3.4.7.3.1 Anwendungen von Parallelogrammen

Schalen bleiben waagerecht.



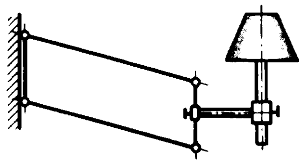
Tafelwaage

Waagschale bleibt waagerecht.



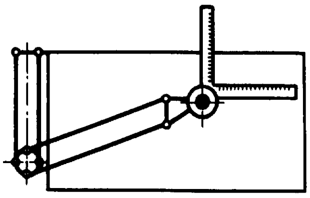
Briefwaage

Lampe bleibt waagerecht.



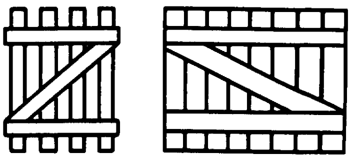
Lampenhalter

Man kann parallele Linien ziehen.



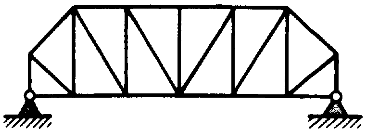
Zeichenmaschine

Durch die Diagonale wird ein seitliches Verschieben verhindert.



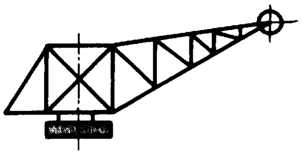
Gartentür

Die Diagonalstäbe geben der Brücke die nötige Steifheit.



Brückenträger

Die Diagonalstäbe geben dem Kran die notwendige Festigkeit.



Drehkran

3.4.7.4 Das Quadrat

Eigenschaften:

Je 2 Seiten laufen zueinander parallel.

Alle Seiten sind gleich lang.

Alle 4 Winkel sind je 90°.

Berechnungen

Die Fläche:

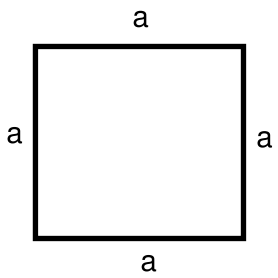
Die Seite:

Die Diagonale:

3.4.7.5 Das Rechteck

Das Rechteck kann aufgefasst werden ausgehend von

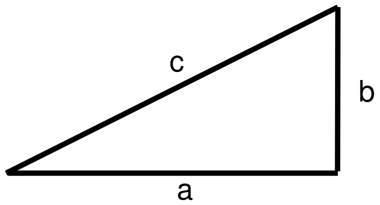
a) dem Quadrat



Erweiterung

aus dem Quadrat

b) dem rechtwinkligen Dreieck



Erweiterung

Zentralsymetrische

Abbildung des Dreieckes

Eigenschaften

Je zwei Seiten sind gleich lang.

Je zwei Seiten verlaufen parallel.

Alle vier Winkel betragen je 90°.

Berechnungen

Fläche $A = l \cdot b$

Länge, Breite

Umfang

Diagonale

Merke

Erstellen Sie eine Umrechnungstabelle bzw. geben sie den Muliplikator oder den Teiler an:

	Multiplikator	Teiler
km	--	1000
m	1000	10
dm	10	10
cm	10	10
mm	10	--

3.4.7.6 Rhombus, Rhomboid, Trapez

Rhomben, Rhomboide und Trapeze **Parallelogramme**
sind die aus Rechtecken aufgebaut oder in sie zurückverwandelt werden können.

Eigenschaften Rkombus und Rhomboid

Je zwei Seiten sind parallel.

Je zwei Winkel sind gleich.

Die Diagonalen halbieren sich.

Eigenschaften Trapez

Im minimum ein Paar parallele Seiten vorhanden.

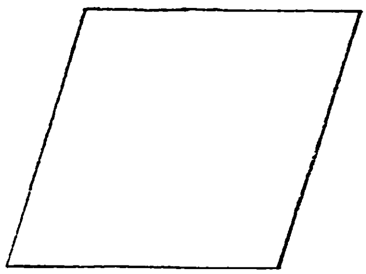
Die Mittellinie halbiert die Schenkel.

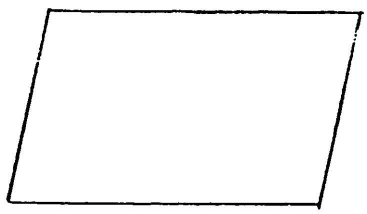
Merke
Diese Parallelogramme können nicht mehr wie das Rechteck mit einem Flächenmass (cm, m) lückenlos überdeckt werden. Warum?

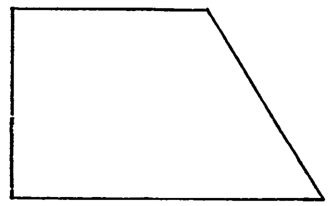
Da die Winkel nicht mehr je 90° betragen.

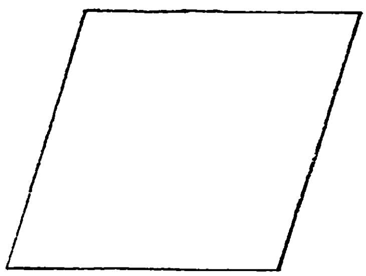
Mit dem bereits Erlernten können wir die Flächeninhalte trotzdem bestimmen mit Hilfe der Flächenumwandlung:

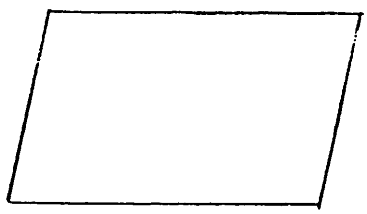
Rhombus **Rhomboid** **Trapez**







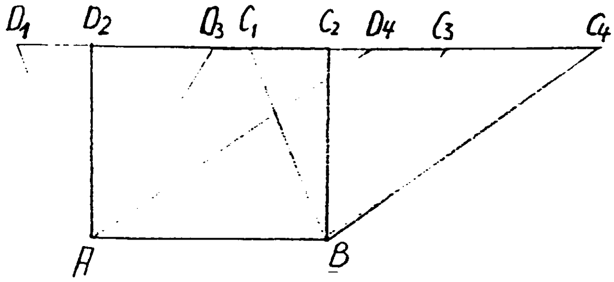




Merke

Die Fläche eines Parallelogrammes wird berechnet mit dem Produkt aus einer der vier Seiten und der dazugehörigen Höhe.

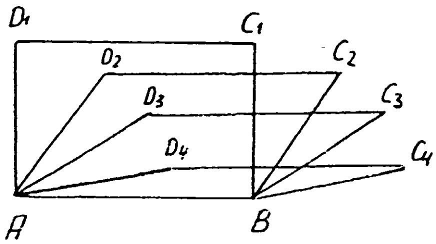
Figur 1



Worin stimmen alle Parallelogramme überein und was schliessen Siedaraus?

Eine Seite bleibt konstant und auch die Höhe. Somit müssen die Flächen sämtlicher Rhomben gleich gross sein.

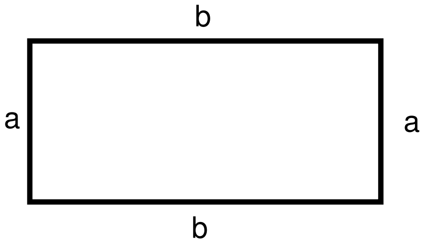
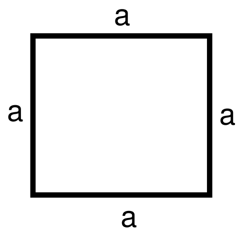
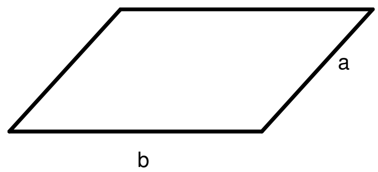
Figur 2



Die Parallelogramme stimmen in der Länge ihrer Seiten überein; ob auch in ihren Flächeninhalten?

Nein!
Mit zunehmendem Neigungswinkel nimmt die Fläche ab.

Wie verhalten sich die Diagonalen an Parallelogrammen. Stellen Sie alle Eigenschaften zusammen:

Rechteck	Quadrat	Rhombus
		
Sind gleich lang	**Sind gleich lang**	**nicht gleich lang**
Halbieren sich	**Halbieren sich**	**Halbieren sich**
Schneiden sich im Mittelpunkt	**Schneiden sich im Mittelpunkt**	**Schneiden sich im Mittelpunkt**

3.4.8 Der Kreis