Kapitel 3
Mathematik

Kapitel 3.6
Geometrie
Satz des Pythagoras

Verfasser:
Hans-Rudolf Niederberger
Elektroingenieur FH/HTL
Vordergut 1, 8772 Nidfurn
055 - 654 12 87

Ausgabe:
November 2010

Inhaltsverzeichnis
3 Mathematik

3.6 Satz des Pythagoras

3.6.1 Einleitung

Schon im 4. Jahrhundert v. Chr. führten Aristoteles und Aristoxenos die Anfänge der Mathematik bei den Griechen auf die Pythagoreer bzw. Pythagoras zurück. In der Spätantike und im Mittelalter war die Überzeugung allgemein verbreitet, Pythagoras sei der Begründer der Mathematik gewesen.

Münzabbildung des Pythagoras

Damit war auch die Geometrie gemeint, der für die antiken Griechen wichtigste Teil der Mathematik. Dazu passte die Überlieferung vom Aufenthalt des Pythagoras in Ägypten, denn schon Herodot war der Überzeugung, die Geometrie stamme ursprünglich aus Ägypten, sie sei ein Ergebnis der Notwendigkeit stets neuer Landvermessung nach den regelmäßigen Nilüberschwemmungen gewesen.

Schon Isokrates nahm an, Pythagoras habe seine Mathematik und Astronomie den Ägyptern verdankt. Ferner galt Pythagoras auch als Vermittler mathematischen Wissens der Babylonier, denn man ging davon aus, dass er sich in seiner Jugend in Babylon aufgehalten hatte.

3.6.2 Lehrsatz von Pythagoras

Aufgabe 6.25
Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC aus b=4cm und a=3cm. Errichten Sie auf den Seiten die Quadrate, und teilen sie durch parallele Linien in cm^2 ein. Vergleichen Sie die Quadrate der Katheten mit den Hypotenusenquadraten.

Erkenntnis:

"Alles ist Zahl"

Pythagoras von Samos
(Geboren um 570 v. Christus, † nach 510 v. Chr.),

war ein griechischer Philosoph

Lehrsatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Der Pythagoreische Lehrsatz ist nach dem berühmten griechischen Mathematiker „Pythagoras“ (500 v. Chr.) benannt. Dieser berühmte Lehrsatz ist nicht von Phythagoras gefunden worden, sondern ist viel älter.

3.6.3 Lehrsatz des Euklid

Beweise für den Pythagoreischen Lehrsatz gibt es viele. Wir begnügen uns hier mit einem, mit dem Lehrsatz des Euklid.

Aufgabe 6.26

Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC aus a=3cm und b=4cm. Errichten Sie auf den Seiten die Quadrate, und teilen sie durch ihre Verlängerung das Hypotenusenquadrat in zwei Rechtecke aus der Hypotenuse und einem Hypotenusenabschnitt. Die Hypotenusenabschnitte q und p nennt man auch Projektionen der Katheten b und a.

Erkenntnis:

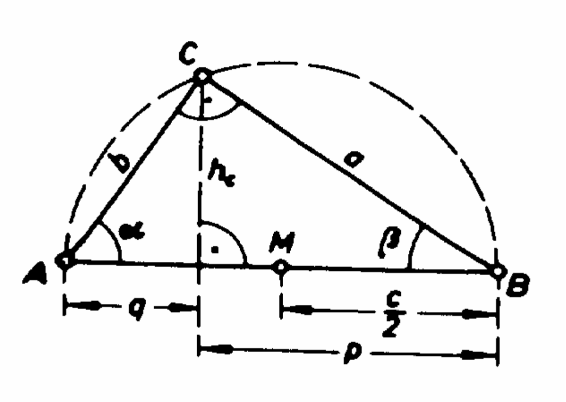
Euklid von Alexandria war ein griechischer Mathematiker.

Lehrsatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusen-Abschnitt $a^2 = c \cdot p$ / $b^2 = c \cdot q$

(ca. 365 v. Christus vermutlich in Alexandria oder Athen; † ca. 300 v. Chr.)

3.6.4 Satz des Thales



Ist ein Winkel ein Rechter, so heisst die gegenüberliegende Seite Hypotenuse, die beiden anliegenden Seiten Katheten.

Bei einem Winkel $\gamma = 90°$ gilt:

Thales von Milet

„Das Wasser ist das Beste“

Er galt als der älteste der sieben Weisen in der Antike.

Lehrsatz des Thales (Thaleskreis)

Im rechtwinkligen Dreieck liegt der rechte

Auf dem Halbkreis (Umkreis) über der

Hypotenuse.

Umkreisradius:

$$r = \frac{c}{2}$$

Inkreisradius:

$$\rho = \frac{a + b - c}{2}$$

Aufgabe 6.27

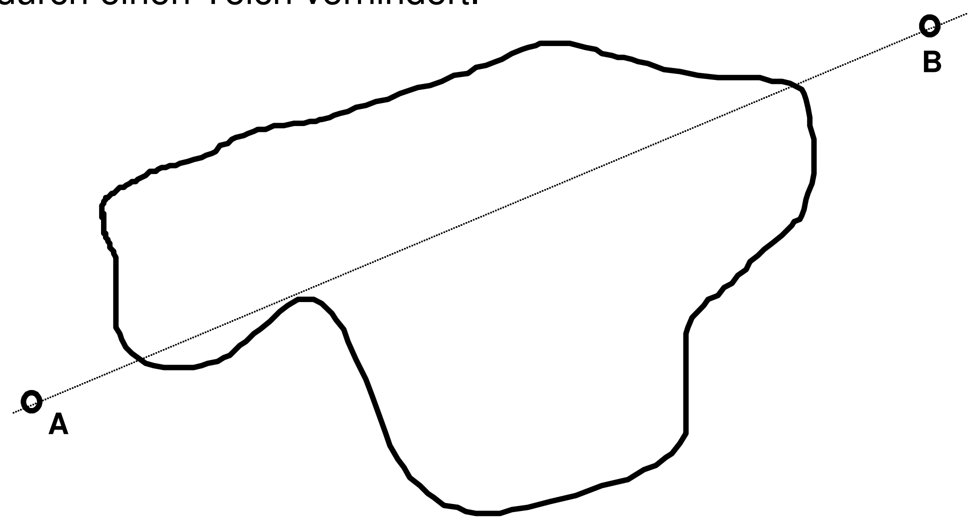
Verwandlen Sie ein beliebiges Trapez ABCD in ein Quadrat.

Lösung:

Verwandlen Sie zunächst das gegebene Trapez ABCD in ein Rechteck FGHE. Tragen Sie darauf die kleinere Rechteckseite EF vom Eckpunkt E auf der grösseren Seite EH ab, und errichten Sie im Endpunkt die Senkrechte. Zeichen Sie über der grösseren Rechteckseite EH den Halbkreis, der die Senkrechte in K schneidet. Die Verbindung KE ist die gesuchte Quadratseite.

Aufgabe 6.28

Es soll im Freien die Entfernung AB bestimmt werden. Die unmittelbare Messung wird durch einen Teich verhindert.



Lösung:

Mit Hilfe des Winkelspiegels wird ein Punkt C so festgelegt, dass $\measuredangle ACB=90°$ ist. AC und CB werden gemessen. AB wird berechnet. Lösen Sie die Aufgabe für AC=60m und CB=50m.

Aufgabe 6.29

Berechnen Sie die Diagonale eines Quadrates mit der Seite a=4cm.

Aufgabe 6.30

Eine 7,5m lange Leiter wird an eine Hauswand gelehnt. Wie hoch reicht sie hinauf, wenn ihr unterstes Ende 1,8m von der Hauswand entfernt ist?

3.6.5 Höhensatz

Zeichnen Sie in ein rechtwinkliges Dreieck das Quadrat über der Höhe und das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten q und p. Vergleichen Sie den Inhalt beider Flächen.

Erkenntnis:

Lehrsatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

Höhensatz $h^2 = p \cdot q$

Aufgabe 6.31

Verwandlen Sie ein Rechteck von a=4cm und b=2,5cm mit Hilfe des Höhensatzes in ein Quadrat.

3.6.6 Satz des Heron

Gewöhnlich lautet die Flächenformel für das Dreieck $A = \frac{c \cdot h}{2}$.

Es ist aber auch möglich, die Fläche des Dreiecks unmittelbar aus den drei Seiten zu berechnen. Bezeichnet man den Umfang eines Dreiecks mit 2s, so ist der halbe Umfang s.

$$a + b + c = 2s$$

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

Der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks ist dann

Satz des Heron

$$\boxed{A = \sqrt{s(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}$$

Beweis:

Mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes wird die Höhe h des Dreiecks durch die beiden Seiten a und b ausgedrückt.

Aufgabe 6.32

Von einem Quadrat ist die Länge einer Diagonale gegeben, z.B. d=10m. Wie lang ist eine Quadratseite a?

Aufgabe 6.33

Ein rechtwinkliger Giebel sei 8,2m breit. Die Dachsparren sollen 0,3m über die Auflagestelle hinausragen; wie lang müssen sie sein?

Aufgabe 6.34

A und B seien zwei Punkte, die 340m voneinander entfernt liegen. Es soll der Mittelpunkt des Kreises gesucht werden, der durch A und B geht und der einen Radius von 400m Länge hat. Die Lage des gesuchten Mittelpunktes kann nicht so gefunden werden, dass man mit 400m den Kreis um B schlägt (weshalb nicht?); man bestimmt vielmehr die Mitte der Strecke AB, also C, und berechnet 0C nach dem Pythagoras.

Satz vom Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Die Benennung des Satzes nach Pythagoras stammt von Euklid.

$$U = a + b + c$$

Kathetensatz von Euklid

$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

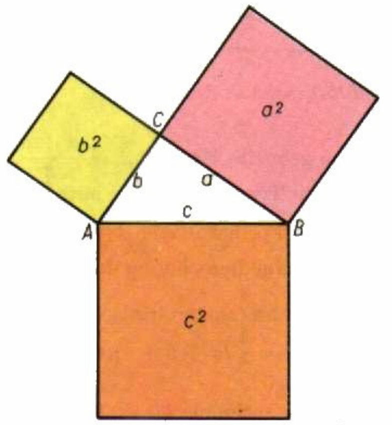
Höhensatz von Euklid

$$h_c{}^2 = p \cdot q$$

Thales von Milet

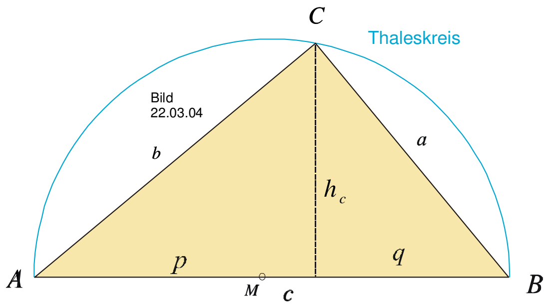
„Das Wasser ist das Beste“

Er galt als der älteste der sieben Weisen in der Antike.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Merke:
Alle Dreiecke unter dem Thaleskreis sind „Recht-winklig“.



p Hypotenusenabschnitt
q Hypotenusenabschnitt

Alle Längenmasse möglich.
Es ist auf die Massgleichheit zu achten.

"Alles ist Zahl"

Pythagoras von Samos

(Geboren um 570 v. Christus, † nach 510 v. Chr.),

war ein griechischer Philosoph

Euklid von Alexandria

(ca. 365 v. Christus vermutlich in Alexandria oder Athen; † ca. 300 v. Chr.),

war ein griechischer Mathematiker.