Kapitel 3
Mathematik

Kapitel 3.8
Geometrie
Trigonometrie

Verfasser:
Hans-Rudolf Niederberger
Elektroingenieur FH/HTL

Vordergut 1, 8772 Nidfurn

Telefon 055 654 12 87
Telefax 055 654 12 88

E-Mail hn@ibn.ch

Ausgabe:
Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

3 Mathematik

3.8 Geometrie - Trigonometrie

3.8.1 Einführung und Begriffe

3.8.2 Einfache trigonometrische Funktionen

3.8.2.1 Ähnliche Dreiecke

3.8.2.2 Trigonometrische Leitsätze

3.8.2.3 Tangensfunktion

3.8.2.4 Grafische Darstellung der sin- und cos-Funktion

3.8.2.5 Spezielle trigonometrische Werte

3.8.3 Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen

3.8.3.1 Einfache Umformungen

3.8.3.2 Hilfsdreiecke für trigonometrische Darstellungen

3.8.3.3 Funktion eines Winkels und des Komplementwinkels

3.8.3.4 Tabellen von trigonometrischen Funktionen

3.8.3.5 Tabelle der Winkelfunktionen

3.8.4 Vektorielle Darstellungen

3.8.5 Grafische Darstellungen von Wirk-, Blindleistung

BiVo

Probleme umfassend bearbeiten
Verstehen und anwenden
Erinnern

TD Technische Dokumentation

BET Bearbeitungstechnik

TG Technologische Grundlagen
3.1 Mathematik

3.1.1 Arithmetische Operationen

- Operationen mit bestimmten und allgemeinen Zahlen
- Berechnungen mit Zehnerpotenzen
- Umrechnungen von Grössenordnungen mit Massvorsätzen

3.1.1 Logische Operationen

- Duales Zahlensystem
- Wahrheitstabelle
- Grundoperationen der Logik:
- AND, OR, NOT

3.1.1 Algebraische Gleichungen

- Gleichungen 1. Grades und rein quadratische Gleichungen
- Gleichungen 2. Grades mit Bezug zu den Fächern dieses Lehrplans

3.1.2 Geometrische Grössen

- Länge, Fläche, Volumen
- Seiten im rechtwinkligen Dreieck
- (Pythagoras)
- Trigonometrische Funktionen:
- Sinus, Cosinus, Tangens (0-90°)
- Darstellung der Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion im Einheitskreis und als Liniendiagramm

3.1.2 Grafische Darstellungen

- Diagrammarten
- Darstellungen im rechtwinkligen Koordinatensystem mit linearen und nichtlinearen Massstäben

3.1.2 Grafische Darstellungen

- Strecke, Pfeil als Mass einer Grösse (Vektor)
- Addition und Subtraktion mit zwei Grössen
- Addition und Subtraktion mit mehreren Grössen

EST Elektrische Systemtechnik

KOM Kommunikationstechnik

Internetlinks:

Einfacher Titel	Internet-Link (Beschreibung des Inhaltes)
Grafen erkennen	http://www.mathe-online.at/galerie/fun2/fun2.html#sincostan (Die Veranschaulichungen sind einfach und klar gute Übungen zum Erkennen von verschiedenen Grafen)
Was bedeuten die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus	http://de.wikipedia.org/wiki/Kosinus (Allgemeines über die Winkelfunktionen und die Namensbedeutung der Funktionen)
Was bedeutet die Winkelfunktion Tangens	http://de.wikipedia.org/wiki/Tangens_und_Kotangens (Allgemeines über die Winkelfunktionen und die Namensbedeutung der Funktionen)

3 Mathematik

3.8 Geometrie - Trigonometrie

3.8.1 Einführung und Begriffe

In der Planimetrie (Geometrie) wurde gelernt, wie z.B. aus drei gegebenen Dreiecksgrössen (Seite, Winkel) die übrigen Stücke **zeichnerisch** bestimmt werden können. Diese Lösungsart bedingt einen gewissen zeichnerischen Aufwand und ist immer mit einer Ungenauigkeit behaftet. Die Trigonometrie hilft uns, diese Zeichenarbeit zu umgehen, indem die Grössen im Dreieck **rechnerisch** bestimmt werden können. Im folgenden beschränken wir uns auf die Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck, weil diese in den meisten Fällen der in der Praxis vorkommenden Probleme genügen.

Begriffe:

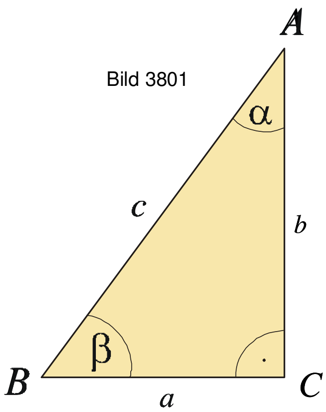


Bild 3801

Die Eckbezeichnungen werden am Dreieck im Gegenuhrzeigersinn beschriftet.

b Kathete
Ankathete „AK“ zum Winkel α
Gegenkathete „GK“ zum Winkel β

a Kathete
Ankathete „AK“ zum Winkel β
Gegenkathete „GK“ zum Winkel α

c Hypotenuse „H“

Beispiel aus der Planimetrie:
Aufgabe: Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten $a = 4cm$; $b = 6cm$. Die Winkel sind mit dem Transporteur abzumessen.

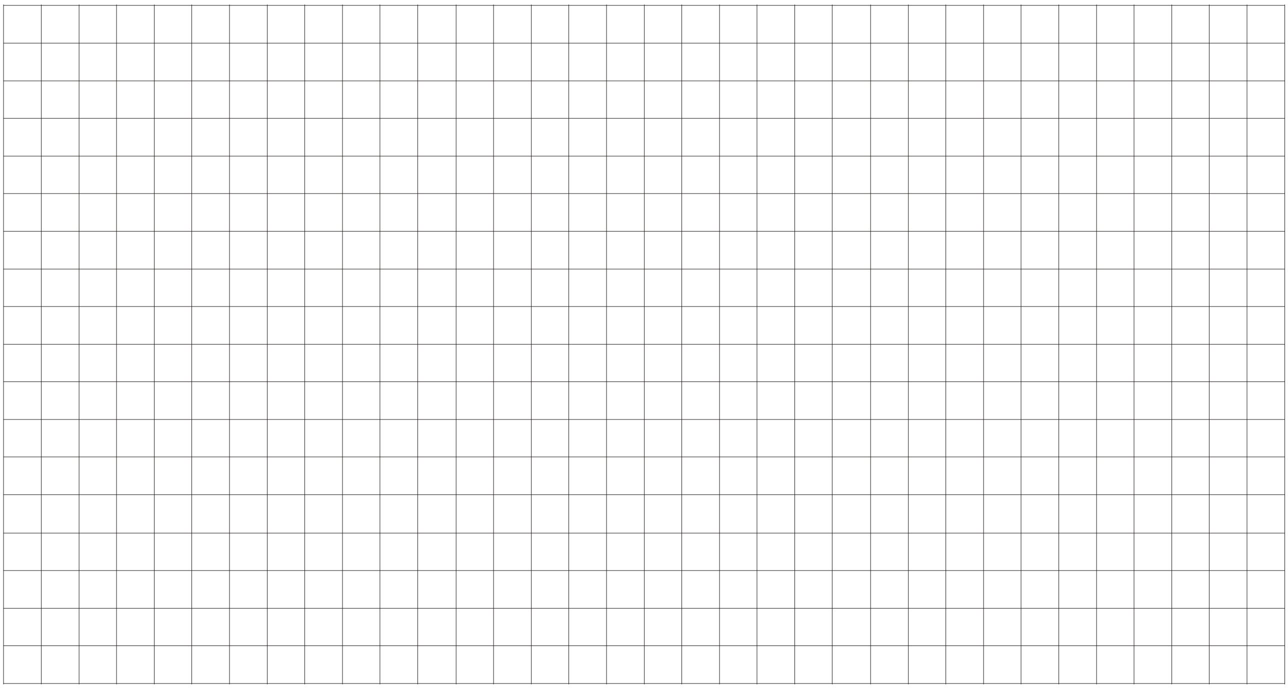


Bild 3802

3.8.2 Einfache trigonometrische Funktionen

3.8.2.1 Ähnliche Dreiecke

Dreiecke sind ählich, wenn gleichliegende Seiten im gleichen Verhältnis stehen; gleichliegende Winkel sind gleich gross.

Beispiel 1:
Drei rechtwinklige Dreiecke gemäss Figur sind bezüglich den Seitenverhältnissen zu untersuchen.

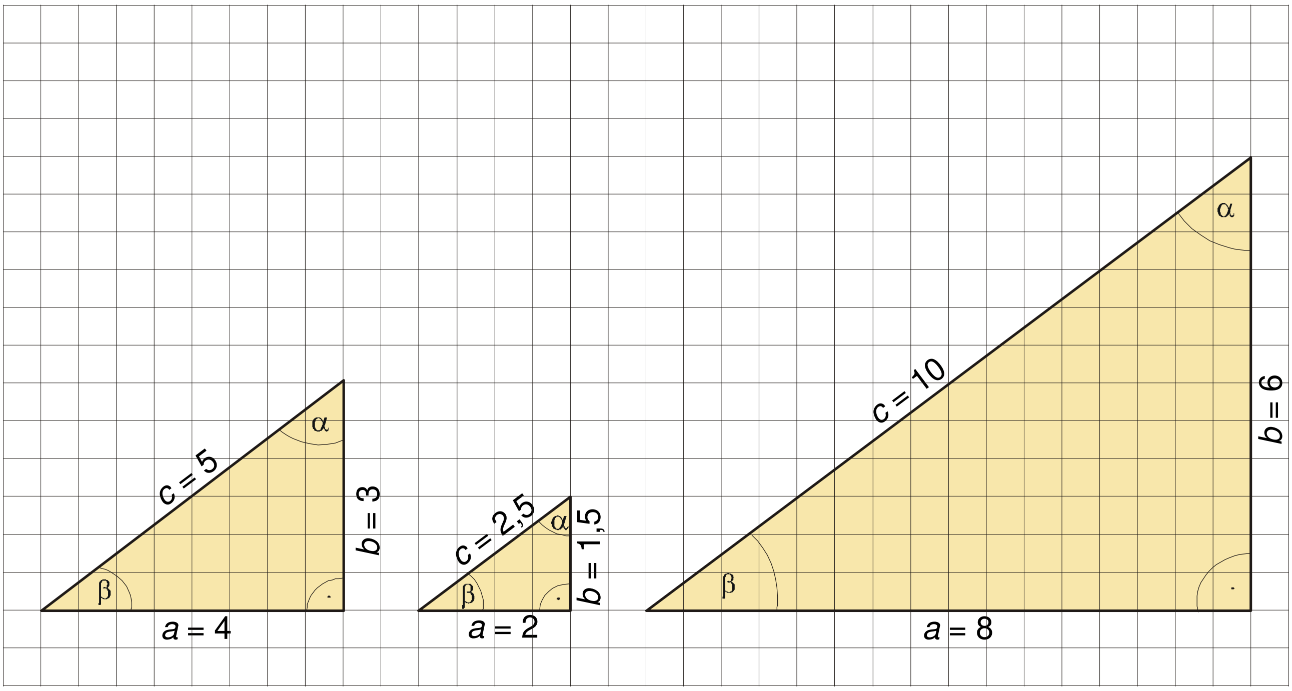


Bild 3803

Auf Grund der Ähnlichkeit gilt

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4} = \frac{1{,}5}{2} = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

$$\frac{a}{c} = \frac{4}{5} = \frac{2}{2{,}5} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$\frac{b}{c} = \frac{3}{5} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{3} = \frac{2}{1{,}5} = \frac{8}{6} = 1{,}33$$

Daraus folgt
Der Wert des Verhältnisses ist ein Mass für die Winkel, die Grösse des Dreiecks spielt dabei keine Rolle.

Beispiel 2:

Gegeben sei das Seitenverhältnis $\frac{a}{b} = 0{,}9\,;\; 0{,}2\,;\; 1{,}5$. Gesucht wird die Grösse der Winkel α und β für jeden der drei Fälle. Die Lösungsfindung ist mit drei verschiedenen Dreiecken zu unterstützen.

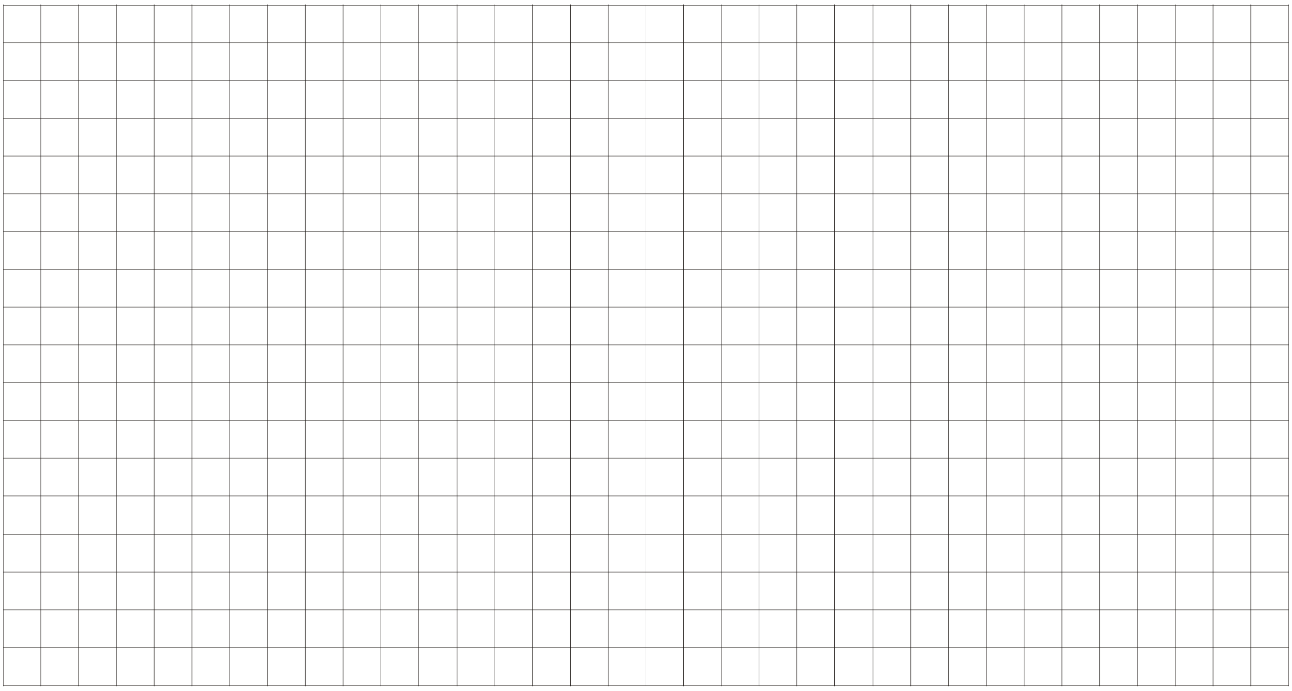


Bild 3804

Wahl der Seiten a und b in Abhängigkeit des gegebenen Verhältniswertes. Aufzeichnen der Dreiecke mit folgenden Werten:

Dreieck 1

$$\frac{a}{b} = 0{,}9 \xrightarrow{z.B.} \frac{4{,}5}{5} = 0{,}9$$

Dreieck 2

$$\frac{a}{b} = 0{,}2 \xrightarrow{z.B.} \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Dreieck 3

$$\frac{a}{b} = 1{,}5 \xrightarrow{z.B.} \frac{6}{4} = 1{,}5$$

Daraus folgt
Den Seitenverhältnissen sind immer Winkel zugeordnet bzw. zu einem bestimten Winkel können beliebige Seitenverhältnisse entnommen werden.

Bestimmung der Winkel zu den drei Dreiecken:

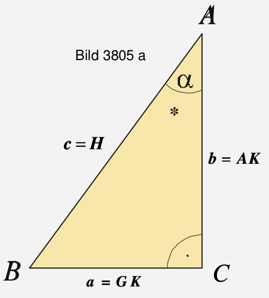
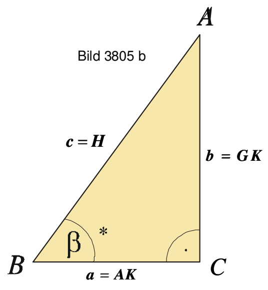
Dreieck 1	Dreieck 2	Dreieck 3
		$\gamma =$ ______
$\alpha =$ ______	$\alpha =$ ______	$\alpha =$ ______
$\beta =$ ______	$\beta =$ ______	$\beta =$ ______
$\alpha + \beta =$ ______	$\alpha + \beta =$ ______	$\alpha + \beta + \gamma =$ ______

Daraus folgt
Die Summe der inneren Winkel in einem Dreieck beträgt immer

______

3.8.2.2 Trigonometrische Leitsätze

Damit zur Bestimmung der Winkel nicht jedes Mal die Dreiecke gezeichnet werden müssen, wurden Tabellen vorbereitet, worin für die entsprechenden Verhältniszahlen die dazugehörigen Winkel abgelesen werden konnten. Dabei wurden folgende Definitionen zugrunde gelegt:

Funktion	Beziehung, Verhältnis	Seitenverhältnisse für den Winkel $*\ \alpha$ 	Seitenverhältnisse für den Winkel $*\ \beta$ 
$sin* =$	$\frac{GK}{H}$	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\sin\beta = \frac{b}{c}$
$cos* =$	$\frac{AK}{H}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\cos\beta = \frac{a}{c}$
$tan* =$	$\frac{GK}{AK}$	$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$\tan\beta = \frac{b}{a}$
$c\,tan* =$	$\frac{AK}{GK}$	$c\tan\alpha = \frac{b}{a}$	$c\tan\beta = \frac{a}{b}$

GK Gegenkathete
zum betrachteten Winkel

AK Ankathete
zum vorgesehenen Winkel

H Hypotenuse
Gegenseite zum rechten Winkel

Die lateinische Bezeichnung „Sinus“ heisst Bogen, Krümmung, …

Für diesen mathematischen Begriff wählte Gerhard von Cremona 1175 als Übersetzung der arabischen Bezeichnung „gaib oder jiba “ „Tasche, Kleiderfalte“, selbst entlehnt von Sanskrit „jiva“ ‘Bogensehne‘ indischer Mathematiker (vielleicht nach dem Verlauf einer Sehne, die schraubenförmig um einen Stab gewickelt wird).

Die Bezeichnung „Cosinus“ ergibt sich aus complementi sinus, also Sinus des Komplementärwinkels. Diese Bezeichnung wurde zuerst in den umfangreichen trigonometrischen Tabellen verwendet, die von Georg von Peuerbach und seinem Schüler Regiomontanus erstellt wurden.

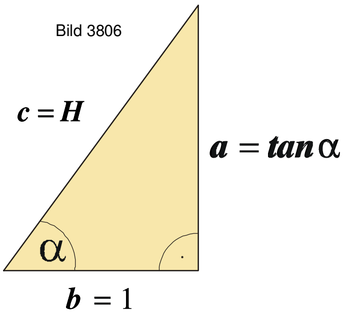
3.8.2.3 Tangensfunktion

Gemäss Definition ist $tan^* = \frac{GK}{AK} \xrightarrow{\text{daraus folgt}} tan\,\alpha = \frac{a}{b}$

Die Grösse der $tan-$Funktion ist nur vom Öffnungswinkel α abhängig. Wird die Ankathete $b = 1$ gewählt, so entspricht die Länge der Gegenkathete a dem Tangens des Winkels α.

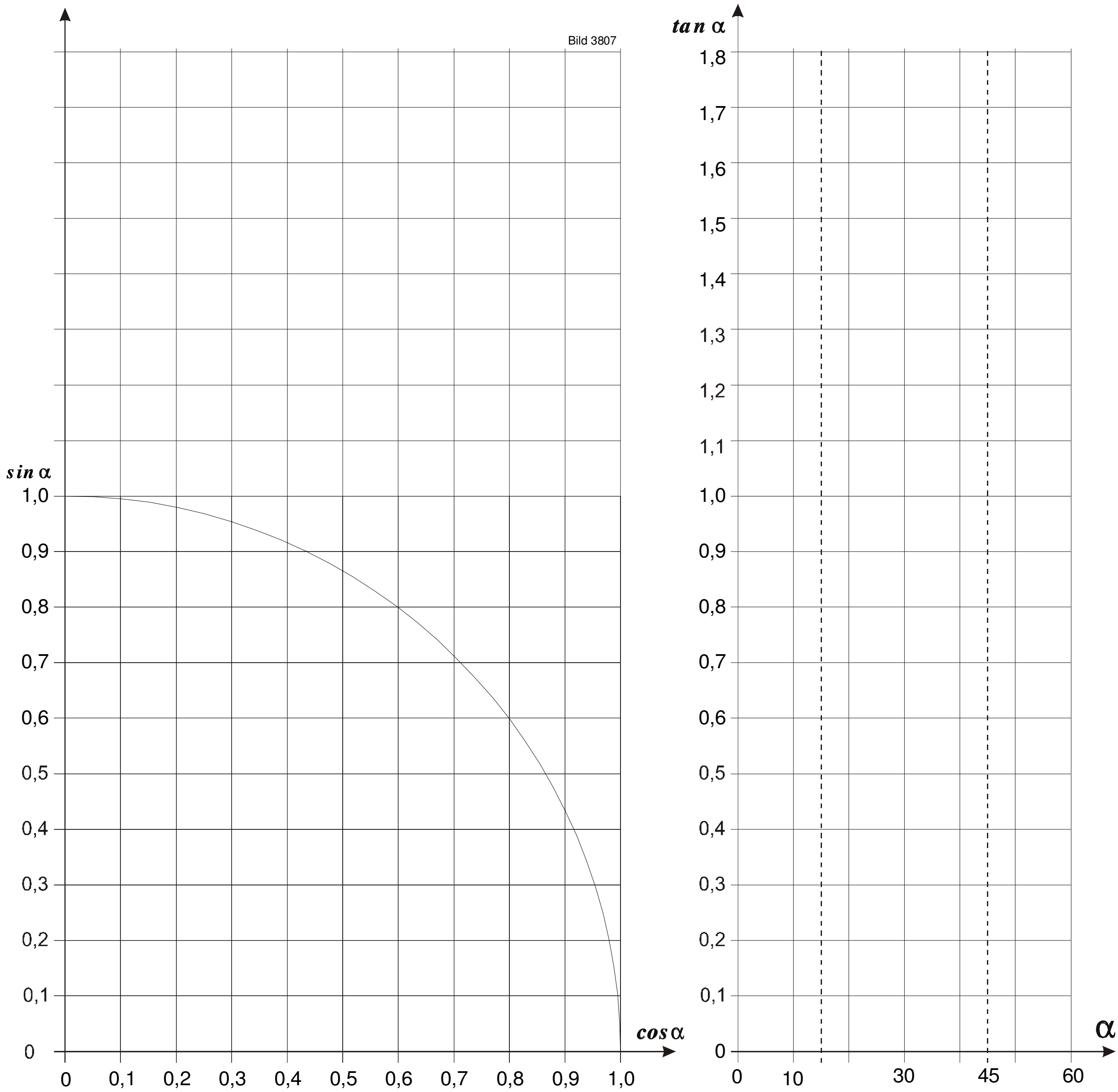
$$tan\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$$

Bild 3806



Methode zur grafischen Darstellung der Tangens-Funktion:

Bild 3807



3.8.2.4 Grafische Darstellung der sin- und cos-Funktion

Um die einzelnen Funktionswerte grafisch zu bestimmen, ist es zweckmässig, die Konstruktion im Einheitskreis ($c = r = 1$) vorzunehmen:

Gemäss Definition ist $sin* = \frac{GK}{H} \xrightarrow{\text{daraus folgt}} sin\,\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{1} = a$

$$cos* = \frac{AK}{H} \xrightarrow{\text{daraus folgt}} cos\,\alpha = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b$$

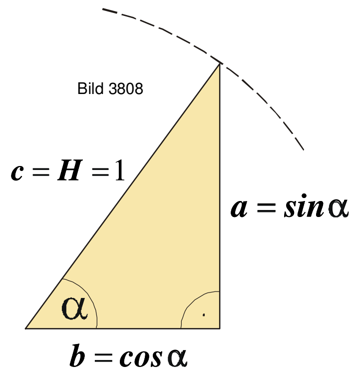


Bild 3808

Die Hypotenuse c wird als Radius im Einheitskreis dargestellt. Dadurch entspricht die Gegenkathete a dem Sinus des Winkels α und die Ankathete b dem Cosinus von α.

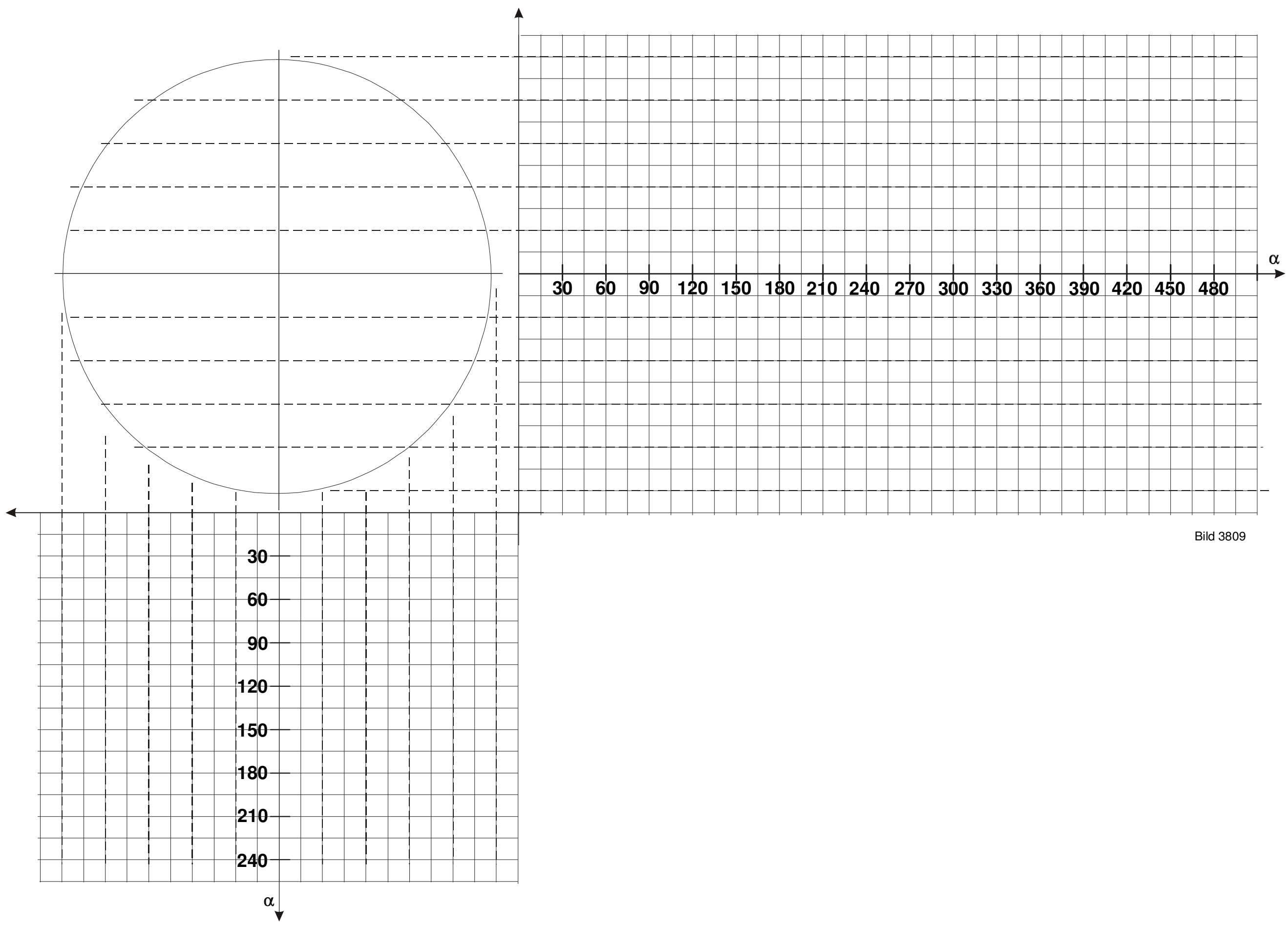


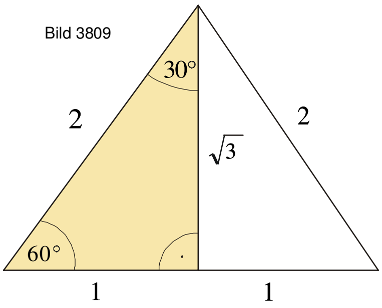
Bild 3809

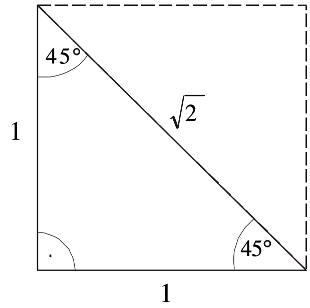
Allgemein kann der Begriff der Winkelfunktion ausgedehnt werden für Winkel, die grösser als 90° sind. Aus obiger Darstellung lässt sich dies leicht ableiten und damit z.B. die $sin-$Funktion dargestellen für Winkel von 0° bis 360°. In der Wechselstromlehre wird dieser Bereich als „1 Periode“ bezeichnet.

3.8.2.5 Spezielle trigonometrische Werte

Die Funktionswerte für die Winkel 0°, 30°, 45°, 60° und 90° lassen sich am einfachsten aus den nachstehenden Hilfdreiecken ableiten.

Bild 3809





Winkel α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					
$c\tan\alpha$					

3.8.3 Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen

3.8.3.1 Einfache Umformungen

Durch einfache algebraische Umformungen lassen sich folgende Zusammenhänge darstellen:

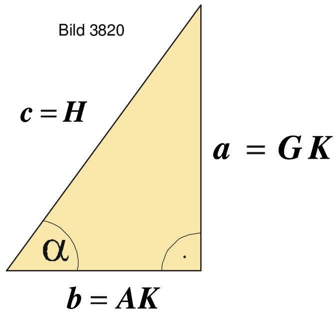
$\tan\alpha \longleftarrow \quad \longrightarrow c\tan\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \longrightarrow \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a}$$

$$c\tan\alpha = \frac{b}{a} \longrightarrow \frac{b}{a} = c\tan\alpha$$

$$\frac{1}{\tan\alpha} = c\tan\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{c\tan\alpha}$$



$\tan\alpha \longrightarrow \sin\alpha;\cos\alpha$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

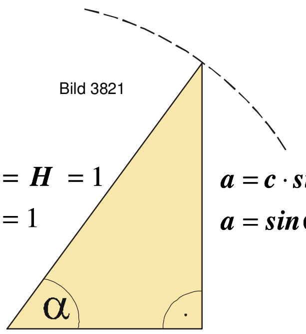
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$: \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan\alpha \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

3.8.3.2 Hilfsdreiecke für trigonometrische Darstellungen

Weitere Beziehungen lassen sich am besten mit Hilfsdreiecken ermitteln:

$\sin\alpha \longleftarrow \quad \longrightarrow \cos\alpha$



$c = H = 1$
$c = 1$

$a = c \cdot \sin\alpha$
$a = \sin\alpha$

$b = c \cdot \cos\alpha$
$b = \cos\alpha$

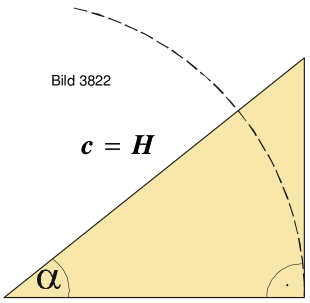
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 + b^2 = 1^2$$
$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Statt $(\sin\alpha)^2$ wird $\sin^2\alpha$ geschrieben; analog bei den übrigen Funktionen.

$$\boxed{\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$$
$$\boxed{\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$$

$\cos\alpha \longrightarrow \tan\alpha$



$c = H$

$a = GK$
$a = \tan\alpha$

$b = AK = 1$
$b = 1$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}}$$

$b = 1$
$c = \sqrt{1^2 - \tan^2\alpha}$

Beispiel:
Wie gross sind $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, wenn $tg\varphi = 0{,}6$ ist?

3.8.3.3 Funktion eines Winkels und des Komplementwinkels

Der Komplementwinkel ist der Ergänzunswinkel auf $90°$.

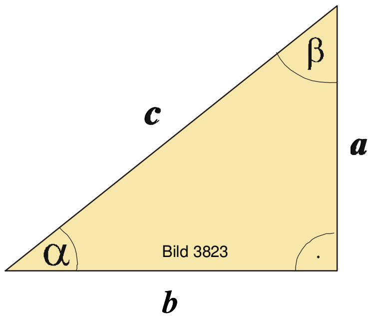


Bild 3823

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta$$

Da $\beta = 90° - \alpha$ ist, lässt sich folgendes ableiten:

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$
$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$
$$\tan\alpha = \cot(90° - \alpha)$$
$$\cot\alpha = \tan(90° - \alpha)$$

Beispiel:
Bestimmen Sie für $\sin 25°$ und $\tan 38°$ die Funktionswerte, die Komplementwinkel und deren Funktionswerte.

3.8.3.4 Tabellen von trigonometrischen Funktionen

Die Feststellungen der Funktionen werden beim Aufstellen von Tabellen für die trigonometrischen Funktionen angewendet und muss auch bei der Handhabung der Lösungsfindung bekannt sein.

Grad	$\sin$	$\tan$	$\cot$	$\cos$	
0	0	0	∞	1,0	90
25	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	65
38	0,6157	0,7813	1,280	0,7880	52
45	0,7071	1,0	1,0	0,7071	45
	$\cos$	$\cot$	$\tan$	$\sin$	Grad

Beispiel:
Bestimmen Sie für $\alpha = 25°$ den Funktionswert $\sin\alpha$, den Winkel β und $\cos\beta$ - sowie für $\alpha = 38°$ den Funktionswert $\tan\alpha$, den Winkel β und $\cot\beta$.

3.8.3.5 Tabelle der Winkelfunktionen

Grad	sin	tg	ctg	cos	
0	0,0000	0,0000	(∞)	1,0000	90
1	0,0175	0,0175	57,290	0,9998	89
2	0,0349	0,0349	28,636	0,9994	88
3	0,0523	0,0524	19,081	0,9986	87
4	0,0698	0,0699	14,301	0,9976	86
5	0,0872	0,0875	11,430	0,9962	85
6	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	84
7	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	83
8	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	82
9	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	81
10	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	80
11	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	79
12	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	78
13	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	77
14	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	76
15	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	75
16	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	74
17	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	73
18	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	72
19	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	71
20	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	70
21	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	69
22	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	68
23	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	67
24	0,4067	0,4452	2,246	0,9135	66
25	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	65
26	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	64
27	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	63
28	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	62
29	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	61
30	0,5000	0,5774	1,732	0,8660	60
31	0,5150	0,6009	1,664	0,8572	59
32	0,5299	0,6249	1,600	0,8480	58
33	0,5446	0,6494	1,540	0,8387	57
34	0,5592	0,6745	1,483	0,8290	56
35	0,5736	0,7002	1,428	0,8192	55
36	0,5878	0,7265	1,376	0,8090	54
37	0,6018	0,7536	1,327	0,7986	53
38	0,6157	0,7813	1,280	0,7880	52
39	0,6293	0,8098	1,235	0,7771	51
40	0,6428	0,8391	1,192	0,7660	50
41	0,6561	0,8693	1,150	0,7547	49
42	0,6691	0,9004	1,111	0,7431	48
43	0,6820	0,9325	1,072	0,7314	47
44	0,6947	0,9657	1 036	0,7193	46
45	0,7071	1,0000	1,000	0,7071	45
	cos	ctg	tg	sin	Grad

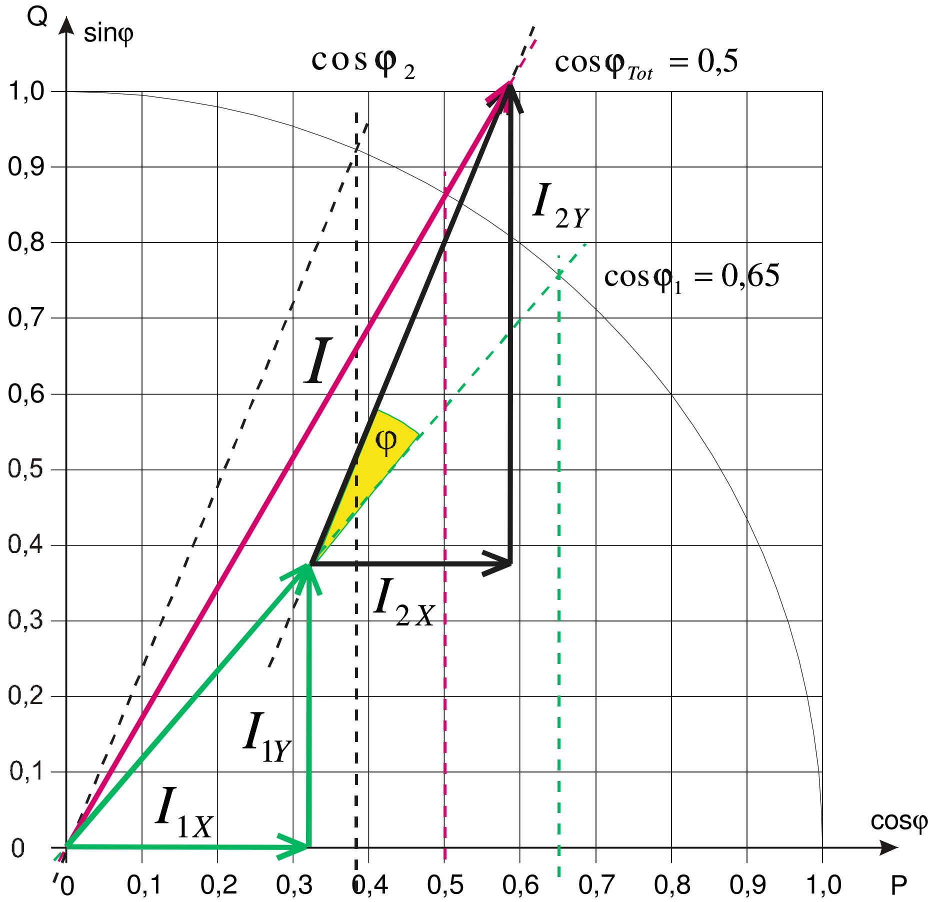
Die Zwischenwerte zu den trigonometrischen Funktionen können durch proportionale Umrechnung bzw. durch Interpolation bestimmt werden:

Beispiel 1:
Es ist der $\sin$-Wert von $\alpha = 27{,}4° = 27°24'$ zu bestimmen.

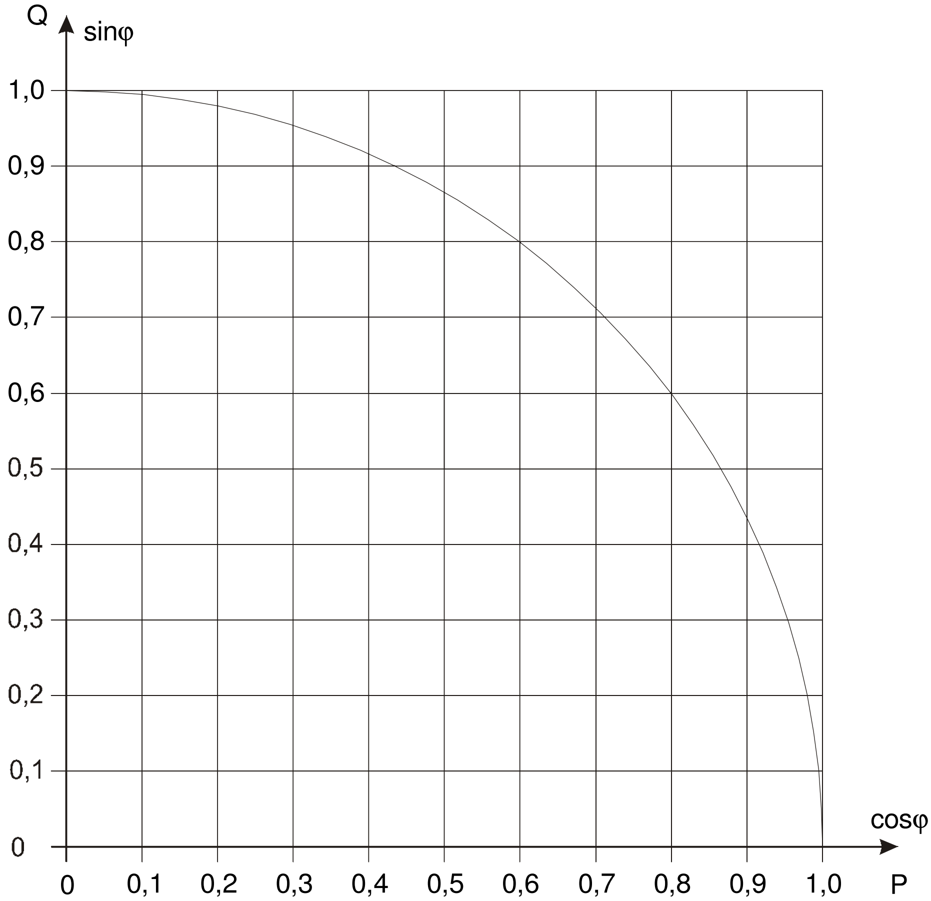
Beispiel 2:
Es ist der α-Wert von $\tan\alpha = 0{,}76$ zu bestimmen.

3.8.4 Vektorielle Darstellungen

In der nachfolgenden Grafik sind zwei Ströme vektoriell Addiert. Stellen Sie eine Formelsammlung zusammen, damit Sie für den allgemeinen Fall den Gesamtstrom berechnen können.



In der nachfolgenden Grafik sind die zwei Ströme von der Vorderseit zu addieren, wobei der Strom 1 (I_1) auf der horizontalen Achse ($\cos\varphi$) einzuzeichnen ist. Der zweite Strom ist mit dem entsprechenden Winkel zwischen I_1 und I_2 zu platzieren. Stellen Sie eine Formelsammlung zusammen, damit Sie für den allgemeinen Fall den Gesamtstrom berechnen können.



3.8.5 Grafische Darstellungen von Wirk-, Blindleistung