Kapitel 3
Mathematik

Kapitel 3.9
Algebra
Grafische Darstellungen und Lösungen

Verfasser:
Hans-Rudolf Niederberger
Elektroingenieur FH/HTL

Vordergut 1, 8772 Nidfurn

Telefon 055 654 12 87
Telefax 055 654 12 88

E-Mail hn@ibn.ch

Ausgabe:
Januar 2009

Inhaltsverzeichnis

BiVo
Probleme umfassend bearbeiten
Verstehen und anwenden
Erinnern

TD Technische Dokumentation

BET Bearbeitungstechnik

TG Technologische Grundlagen
3.1 Mathematik

3.1.1 Arithmetische Operationen

- Operationen mit bestimmten und allgemeinen Zahlen
- Berechnungen mit Zehnerpotenzen
- Umrechnungen von Grössenordnungen mit Massvorsätzen

3.1.1 Logische Operationen

- Duales Zahlensystem
- Wahrheitstabelle
- Grundoperationen der Logik:
- AND, OR, NOT

3.1.1 Algebraische Gleichungen

- Gleichungen 1. Grades und rein quadratische Gleichungen
- Gleichungen 2. Grades mit Bezug zu den Fächern dieses Lehrplans

3.1.2 Geometrische Grössen

- Länge, Fläche, Volumen
- Seiten im rechtwinkligen Dreieck
- (Pythagoras)
- Trigonometrische Funktionen:
- Sinus, Cosinus, Tangens (0-90°)
- Darstellung der Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion im Einheitskreis und als Liniendiagramm

3.1.2 Grafische Darstellungen

- Diagrammarten
- Darstellungen im rechtwinkligen Koordinatensystem mit linearen und nichtlinearen Massstäben

3.1.2 Grafische Darstellungen

- Strecke, Pfeil als Mass einer Grösse (Vektor)
- Addition und Subtraktion mit zwei Grössen
- Addition und Subtraktion mit mehreren Grössen

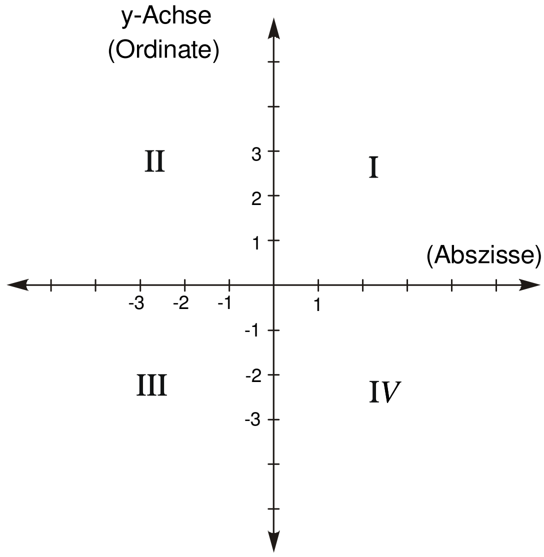
EST Elektrische Systemtechnik

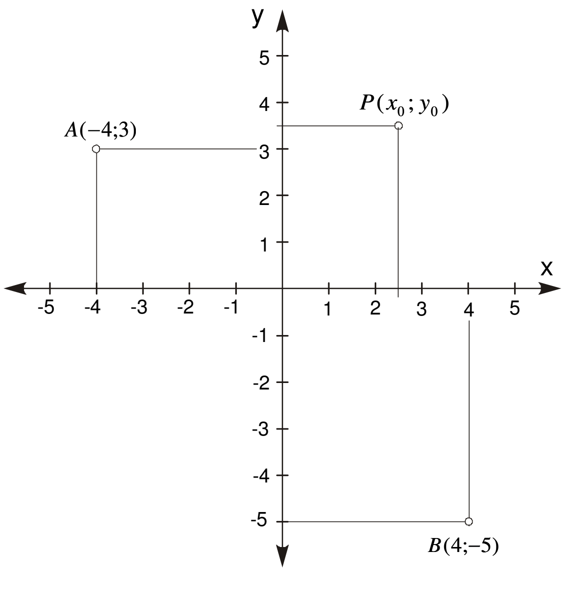
KOM Kommunikationstechnik

3 Mathematik
3.9 Algebra Grafische Darstellungen und Lösungen
3.9.1 Das kartesische Koordinatensystem

Als Hilfsmittel für die grafische Darstellung von Kunktionen dient sehr oft das kertesische Koordinatensystem.

Das kartesische Koordinatensystem wird gebildet durch zwei senkrecht sich schneidende Geraden, die Koordinatenachsen. Man nennt die horizontale Achse x-Achse oder Abszisse, die vertikale Achse y-Achse oder Ordinate. Der Schnittpunkt „Null“ der beiden Koordinatenachsen heisst Koordinatenursprung. Auf jeder der beiden Achsen wählt man eine Masseinheit. Die Achsen teilen die Ebene in vier Quadranten ($\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}$).





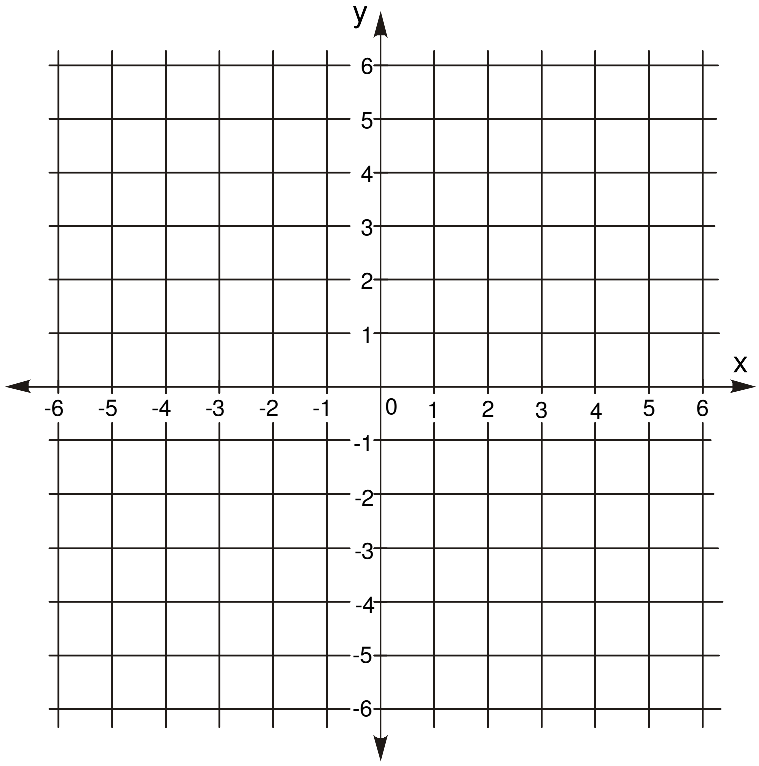
x_0 und y_0 sind die
kartesischen Koordinaten
des Punktes P

Beispiel 1
Jedem Punkt der Ebene wird ein eindeutig bestimmtes geordnetes Zahlenpaar (x;y) zugeordnet. Umgekehrt bestimmt jedes geordnete Paar (x;y) von reelen Zahlen als kartesische Koordinaten genau einen Punkt der Ebene.
Der erste Wert des geordneten Paares ist immer die x-Koordinate, der zweite Wert die y-Koordinate.

Beispiel 2

Bestimmen Sie grafisch die Koordinaten des Schnittpunktes U der Winkelhalbierenden des Dreiecks –

$\triangle ABC$, mit $A(-5;-4)$, $B(5;1)$ und $C(-5;5)$.



3.9.2 Einführung in die Funktionslehre

Definition

Eine reele Funktion f ist eine Zuordnung, bei der jeder reelen Zahl x im Definitionsbereich genau eine reele Zahl y im Wertebereich zugeordnet ist.

$$x \longmapsto y \quad \text{mit} \quad y = f(x)$$

Die grafische Darstellung der Punkte (x ; y) mit $y = f(x)$ in einem kartesischen Koordinatensystem heiss Graph der Funktion f .

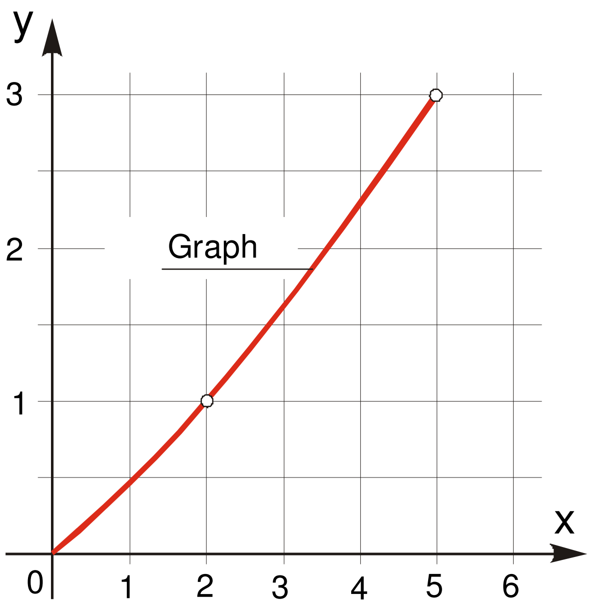
x Argument (unabhängige Variable); y Funktionswert (abhängige Variable)

Unter dem Definitionsbereich versteht man die Menge aller x, für welche die Funktion $f(x)$ definiert ist. Unter dem Wertebereich versteht man die Menge aller y , mit $y = f(x)$.

Die Funktion, d.h. die Zuordnung, kann auf verschiedene Arten dargestellt werden:

1. **Graphen der Funktion**
2. **Wertetabelle**
3. **Funktionsgleichung**

3.9.2.1 Graphen der Funktion



Durch einen Graphen und die Achsenwerte kann jede Funktion beschrieben werden.

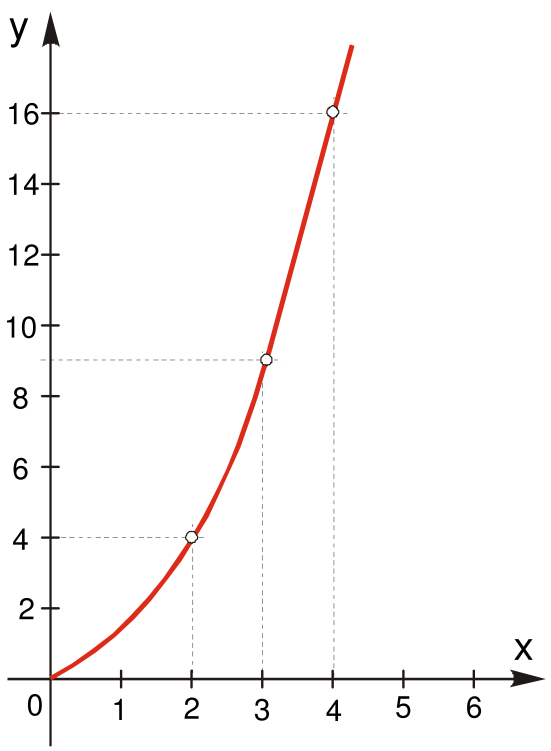
Aus der Grafik ist zu ersehen, dass der Zahl 2 die Zahl 1 zugeordnet werden kann:

$2 \longmapsto 1$

Aus der Zeichnung kann man den Definitionsbereich und den Wertebereich ablesen:

- Definitionsbereich $0 \leq x \leq 5$
- Wertebereich $0 \leq y \leq 3$

3.9.2.2 Wertetabelle



Durch eine Wertetabelle kann jede Funktion beschrieben werden.

Jeder Zahl x wird mit Hilfe der Wertetabelle ihr Quadrat zugeordnet:

Wertetabelle

x	$y = x^2$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	
6	
…	

Wertezuordnung

$0 \longmapsto 0^2 = 0$

$1 \longmapsto 1^2 = 1$

$2 \longmapsto 2^2 = 4$

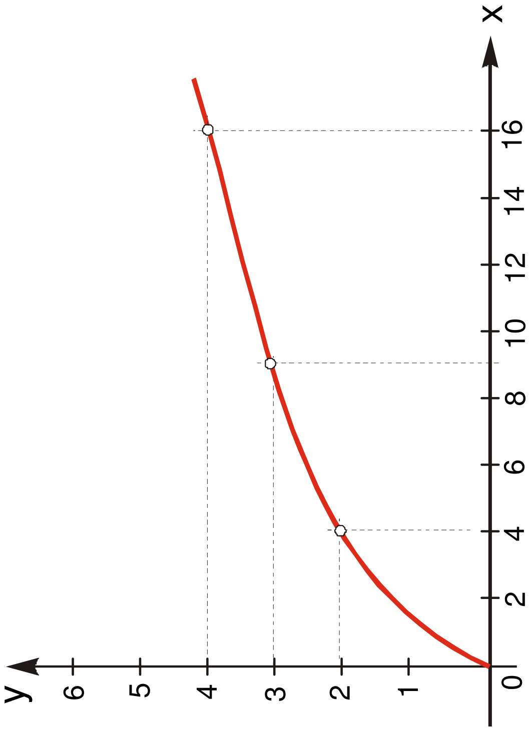
$3 \longmapsto 3^2 = 9$

…

Aus der Zeichnung kann man den Definitionsbereich und den Wertebereich ablesen:

- Definitionsbereich N_0 natürl. Zahlen inkl. Null
- Wertebereich Alle Quadrehtzahlen N_0

3.9.2.3 Funktionsgleichung



Durch eine Funktionsgleichung $y = f(x)$ kann jede Funktion beschrieben werden.

$x \longmapsto y$ mit $y = f(x) = \sqrt{x}$

Funktionsgleichung $y = \sqrt{x}$

Durch diese Funktionsgleichung wird jedem x die Wurzel aus x zugeordnet:

Wertezuordnung

$0 \longmapsto \sqrt{0} = 0$

$1 \longmapsto \sqrt{1} = 1$

$2 \longmapsto \sqrt{2} = 1{,}4142..$

$3 \longmapsto \sqrt{3} = 1{,}7320..$

$4 \longmapsto \sqrt{4} = 2$

$\ldots$

Beispiele von Funktionsgleichungen der Elektrotechnik

$I = f(U)$	$I = \frac{U}{R}$
$P = f(U^2)$	$P = \frac{U^2}{R}$
$U = f(P)$	$U = \sqrt{P \cdot R}$

Aus der Zeichnung kann man den Definitionsbereich und den Wertebereich ablesen:

- Definitionsbereich R^+ Rationalen Zahlen
- Wertebereich Alle R^+ Zahlen

Wir werden uns in diesem Kapitel nur auf sehr wenige Funktionen beschränken. Es sind nach möglichkeit Funktionen, welche im Fachbereich der Elektrotechnik zur Anwendung gelangen.

3.9.3 Lineare Funktionen

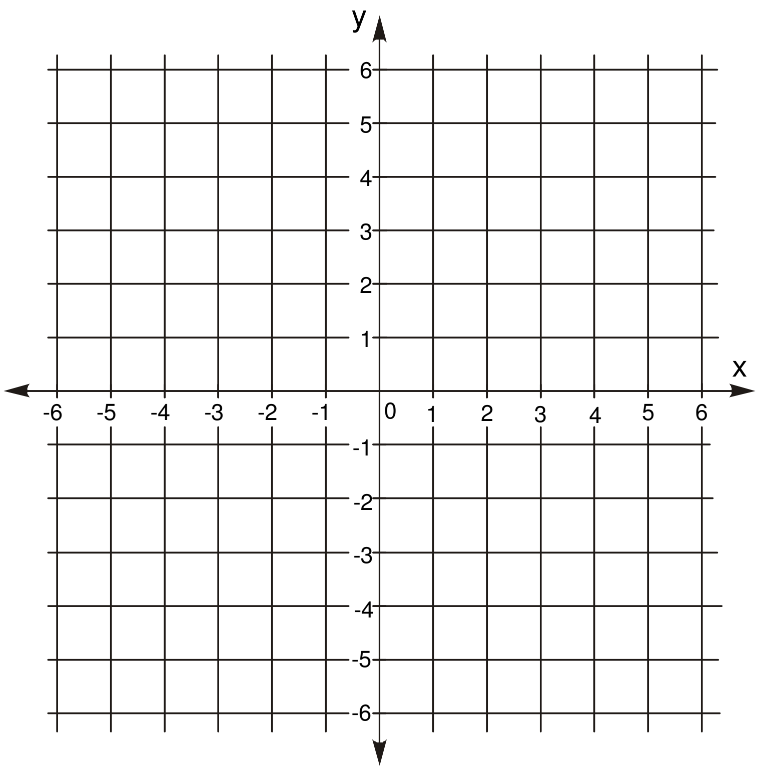
Es gibt hier zwei wesentliche Fälle zu unterscheiden:

1. Lineare Funktion durch den Ursprung
2. Lineare Funktion mit y-Achsenversatz

3.9.3.1 Lineare Funktion durch den Ursprung

Beispiel 1

Skizziert man alle Punkte $(x; y)$ mit $y = 2x$, so erhält man als Graphen eine Gerade, welche durch 0 geht.



Bei der linearen Funktion mit der allgemeinen Darstellung $y = mx + q$ wird der Wert $q = 0$ gesetzt.

Um etwas Klarheit über den Verlauf der Fuktion $y = 2x$ zu bekommen, erstellen wir eine Wertetabelle und skizzieren den Grafen der Funktion.

Wertetabelle

x	$y = 2x$

Für die Funktion gilt folgender Definitionsbereich und Wertebereich:

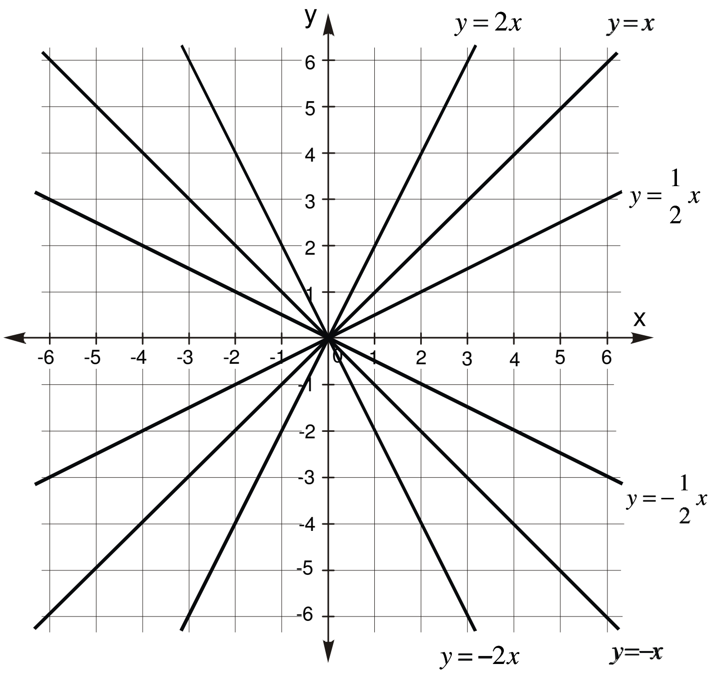
- Definitionsbereich R^+ Rationalen Zahlen
- Wertebereich Alle R^+ Zahlen

Definition

Jede Funktion mit der Funktionsgleichung

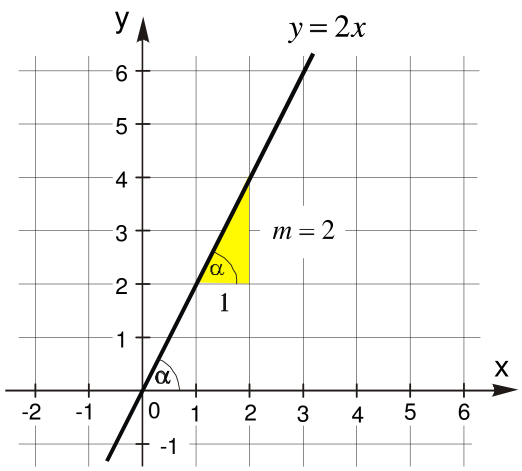
$$y = mx$$

hat als Graphen eine Gerade durch den Ursprung.



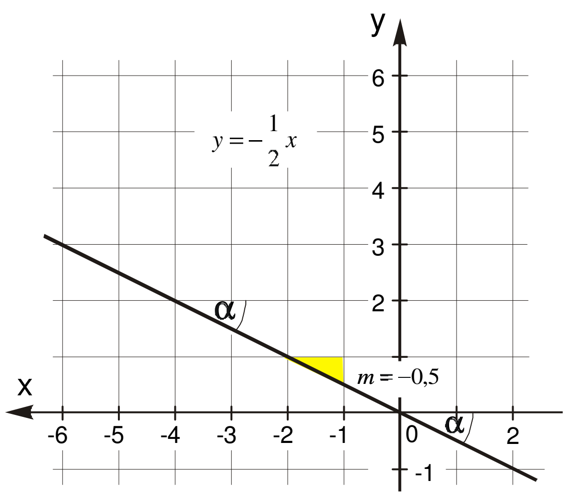
Der Verlauf der Geraden hängt nur vom Koeffizienten m ab.
Man nennt m die <u>Steigung</u> der Geraden.

m positiv



Die Gerade verläuft durch den I und III Quadranten.

m negativ



Die Gerade verläuft durch den II und IV Quadranten.

Bemerkung zur Steigung

Die Bedeutung der Steigung m ist die folgende: Nimmt der x-Wert um 1 zu, so nimmt der Funktionswert y um m zu (m kann auch negativ sein).

3.9.3.2 Lineare Funktion mit y-Achsenversatz

Merksatz

Jede Funktion mit der Funktionsgleichung $\boldsymbol{y = mx + q}$ hat als Graph eine Gerade mit der Steigung $\boldsymbol{m}$ und dem $\boldsymbol{y}$-Achsenversatz $\boldsymbol{q}$.
($\boldsymbol{q}$ kann auch negativ sein).

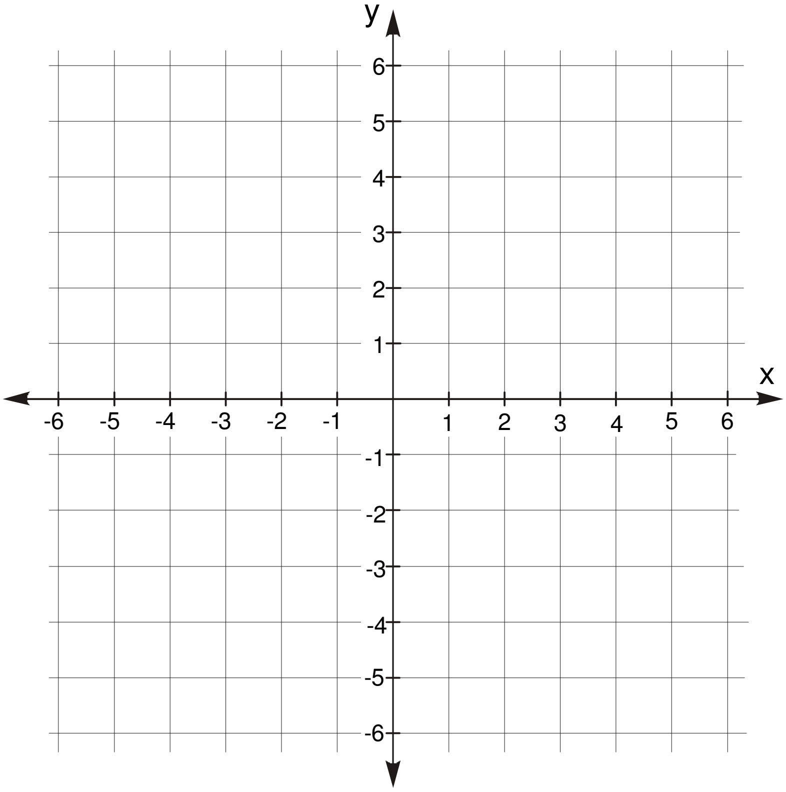
Beispiel 1

Die Gerade $y = mx + q$ ist gegenüber der Geraden $y = mx$ in y-Richtung um q verschoben.

Um etwas Klarheit über den Verlauf der Fuktion $y = \frac{1}{2}x + 2$ zu bekommen, erstellen wir eine Wertetabelle und skizzieren die Grafen $y = mx$ und $y = mx + q$ der Funktionen.

Wertetabelle

x	$y = \frac{1}{2}x$	$y = \frac{1}{2}x + 2$
-5		
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		



Wichtig sind die Funktionswerte bei $x = 0$ und $y = 0$, denn mit diesen Werten kann die Funktion beschrieben werden.

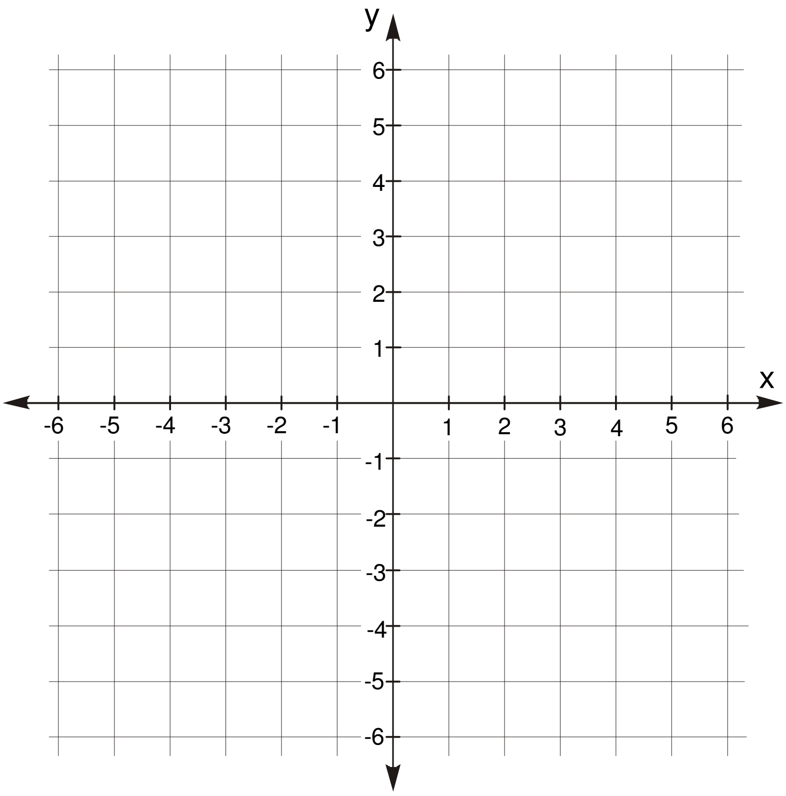
3.9.3.3 Beispiele zu linearen Funktionen

Beispiel 1

Man zeichne nebenan die Graphen der Funktionen $y = x + 1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$ und $y = -2x - 2$.

Wertetabellen

x	$y = x + 1$	$y = \frac{1}{2}x - 1$	$y = -2x - 2$
-5			
-4			
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			
4			
5			



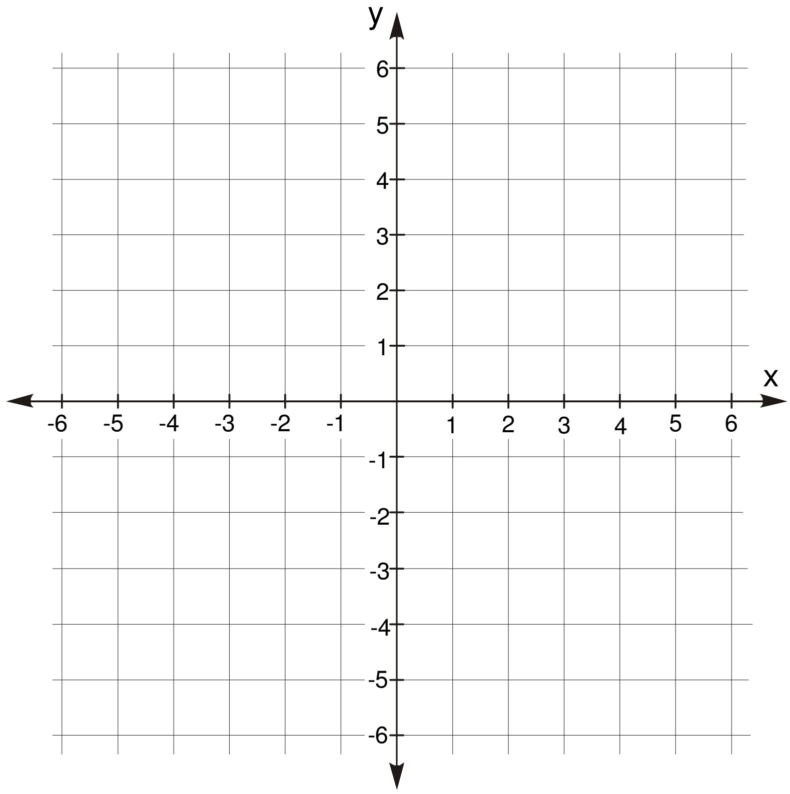
Beispiel 2

Man zeichne nebenan die Graphen der Funktionen

$y = \frac{1}{2}x - 1$ und $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Wertetabellen

x	$y = \frac{1}{2}x - 1$	$y = \frac{1}{2}x + 2$
-5		
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		



Merksatz

Zwei Geraden mit der gleichen Steigung m sind parallel.

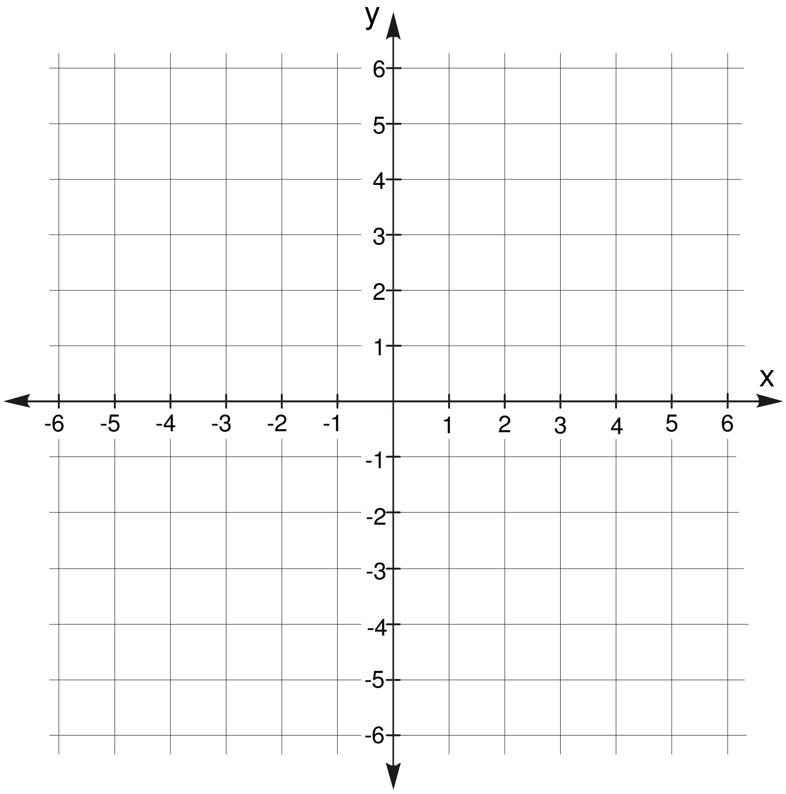
Beispiel 3

Man zeichne für die Steigung $m = 0$ die Graphen der Funktionen

$y = mx - 2$ und $y = mx + 4$.

Wertetabellen

x	$y = -2$	$y = +4$
-5		
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		

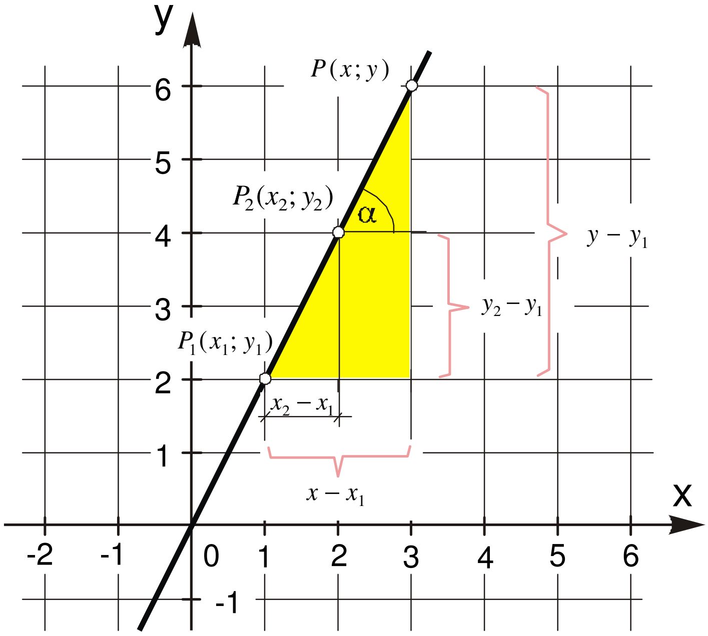


Merksatz

Hat eine Gerade die Steigung $m = 0$, so verläuft sie parallel zur x-Achse.

In der Praxis entspricht dies der Darstellung einer Gleichspannung.

3.9.3.4 Gerade durch zwei Punkte



Beispiel 1

Gegeben sind zwei Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$. Man bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, welche durch die beiden Punkte geht.

Mit dem Strahlensatz kann folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die Funktionsgleichung bestimmen, indem man die Gleichung nach y auflösst.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Strahlensatz

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Gleichung auf y reduzieren

$$\boldsymbol{y = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{m} \cdot x \underbrace{- x_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1}_{q}}$$

m Steigung
q y-Versatz

Merksatz

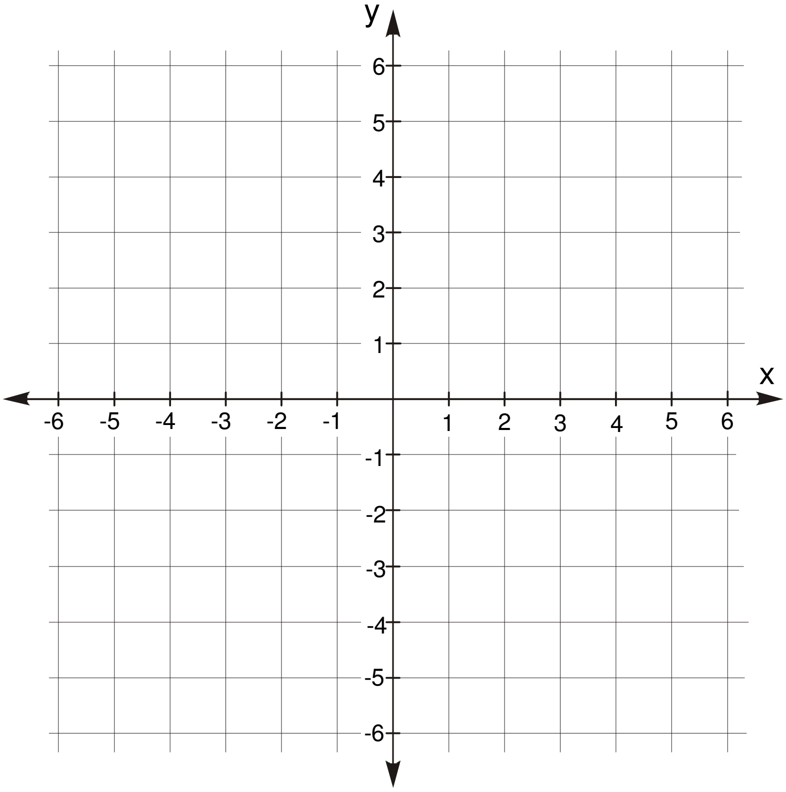
Eine Gerade durch die Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ hat die Funktionsgleichung:

$$y = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{m} \cdot x \underbrace{- x_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1}_{q}$$

Beispiel 2

Bestimmen Sie die Gerade, welche durch die Punkte $P_1(1;1)$ und $P_2(4;2)$ geht.

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - x_1 \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

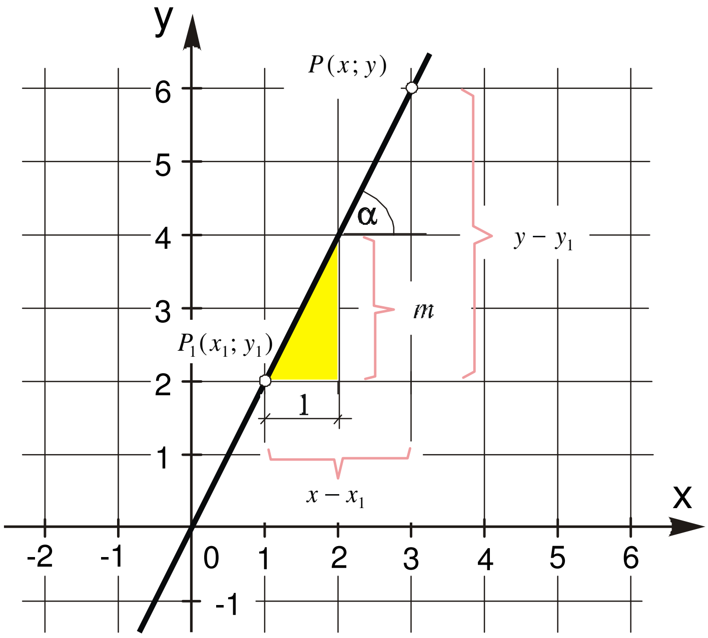


Man kann diese Gerade auch bestimmen, indem man die beiden gegebenen Punkte in der allgemeinen Geradengleichung einsetzt.

Ansatz
$y = mx + q$

P_1 einsetzen	P_2 einsetzen
$y_1 = mx_1 + q$	$y_2 = mx_2 + q$

3.9.3.5 Gerade durch einen Punkt und Steigung



Beispiel 1

Eine Gerade mit der Steigung m geht durch den Punkt $P_1(x_1;y_1)$. Man bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, welche durch diesen Punkt geht mit der Steigung m.

Mit Hilfe des Strahlensatzes kann folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$\frac{m}{1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die Funktionsgleichung bestimmen, indem man die Gleichung nach y auflösst.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{m}{1}$$

Strahlensatz

$$y-y_1 = m\cdot(x-x_1)$$

Gleichung auf y reduzieren

$$y = m \cdot x \underbrace{-x_1 \cdot m + y_1}_{q}$$

m Steigung
q y-Versatz

Merksatz

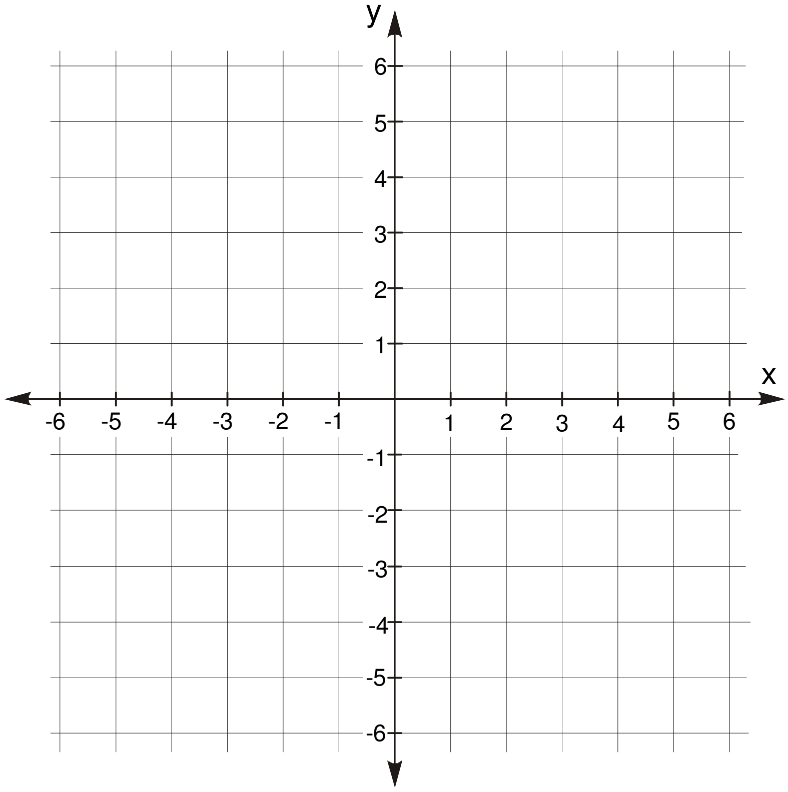
Eine Gerade durch den Punkt $P_1(x_1;y_1)$ und der Steigung m hat die Funktionsgleichung:

$$y = m \cdot x \underbrace{-x_1 \cdot m + y_1}_{q}$$

Beispiel 2

Bestimmen Sie die Gerade durch den Punkt $P_1(2;-1)$ und der Steigung $m=-3$.

$$y = m \cdot x + y_1 - m \cdot x_1$$



Man kann auch hier die Gleichung der Geraden bestimmen, indem man den $P_1(x_1; y_1)$ bzw. $P_1(2;-1)$ in der allgemeinen Geradengleichung einsetzt.

Ansatz

$$y = mx + q$$

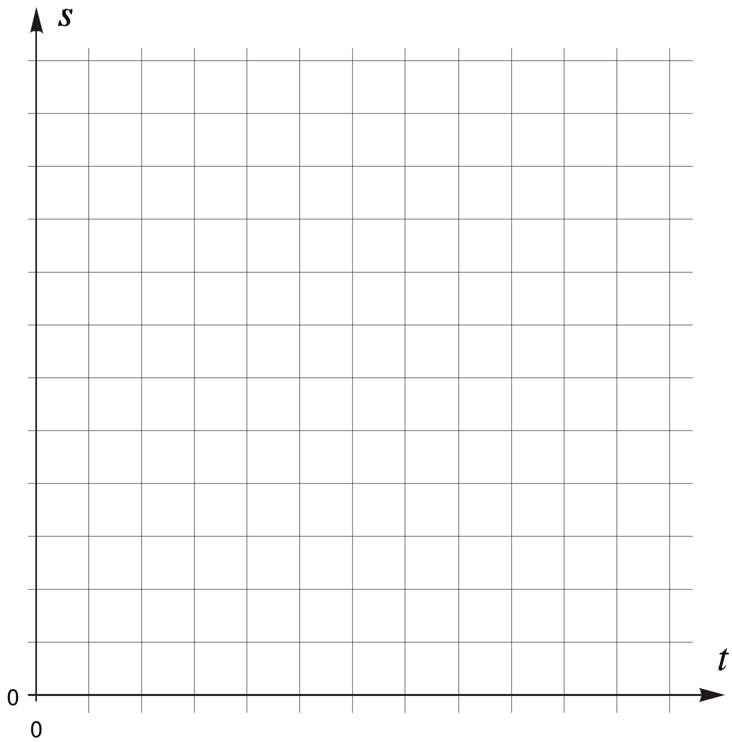
P_1 einsetzen

$$y_1 = mx_1 + q$$

Beispiel 3

Ein Jogger läuft pro Stunde $14\,km$ weit. Skizzieren Sie seinen zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit im Wertebereich von $6\,h$.

$s = V \cdot t$



Wertetabelle
Eine Wertetabelle ist fast immer sinnvoll, da damit die Einteilung der Koordinaten bei der grafischen Darstellung vereinfacht wird und damit der darzustellende Wertebereich festgelegt werden kann.

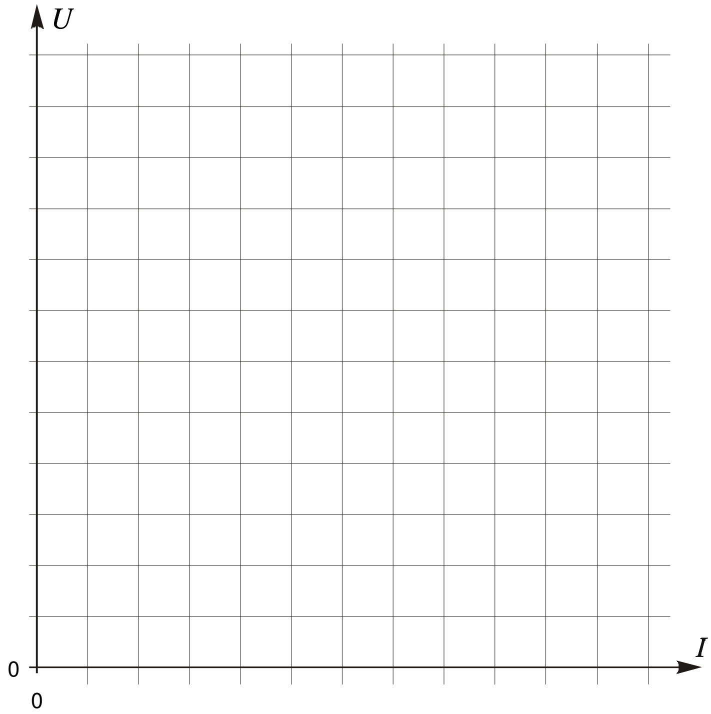
Zeit t in $[h]$	1	2	3	4	5	6
Strecke s in $[km]$						

Beispiel 4

Zwischen der Stromstärke I (Ampère), der Spannung U (Volt) und dem Widerstand R (Ohm) gilt in einem elektrischen Stromkreis für Gleichspannung das Ohmsche Gesetz:

$$U = R \cdot I$$

Stellen Sie den Zusammenhang des ohmschen Gesetzes bei einem Widerstand $R = 20\Omega$ und einem Wertebereich von $U = 120V$ dar.



Wertetabelle

Spannung U in $[V]$	20	40	60	80	100	120
Strom I in $[A]$						

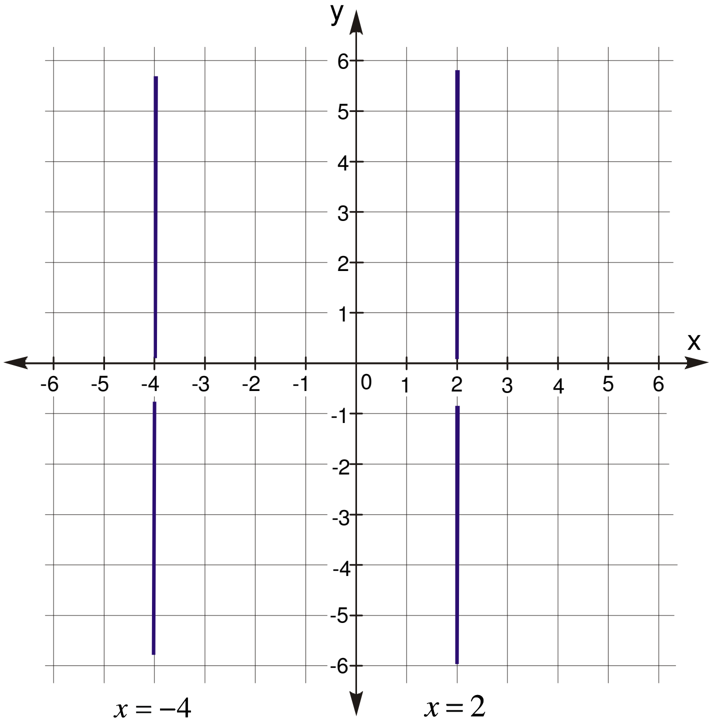
Zusatzfragen

Die Fragen sind mit der vorhandenen Grafik zu beantwortet und die Lösungsfindung soll in der Grafik skizziert werden!

Welcher Strom fliesst bei einer Spannung von $U = 50V$?

Wie gross ist die angelegte Spannung am vorhandenen Widerstand bei einem Strom von $I = 1{,}4\,A$?

3.9.3.6 Spezielle Geraden



Beispiel

Geraden, welche parallel zur y-Achse verlaufen können nicht mit der Funktionsgleichung $y = mx + q$ beschrieben werden.

Die Steigung m ist nämlich unendlich gross. Diese Geraden können jedoch mit der Gleichung

$$\boxed{x = a}$$

a konstant

beschrieben werden.

3.9.4 Grafische Lösung eines linearen Gleichungssystems

3.9.4.1 Gleichungen mit zwei Unbekannten

Beispiel 1

Das Vorgehen wird anhand eines Beispiels gezeigt.

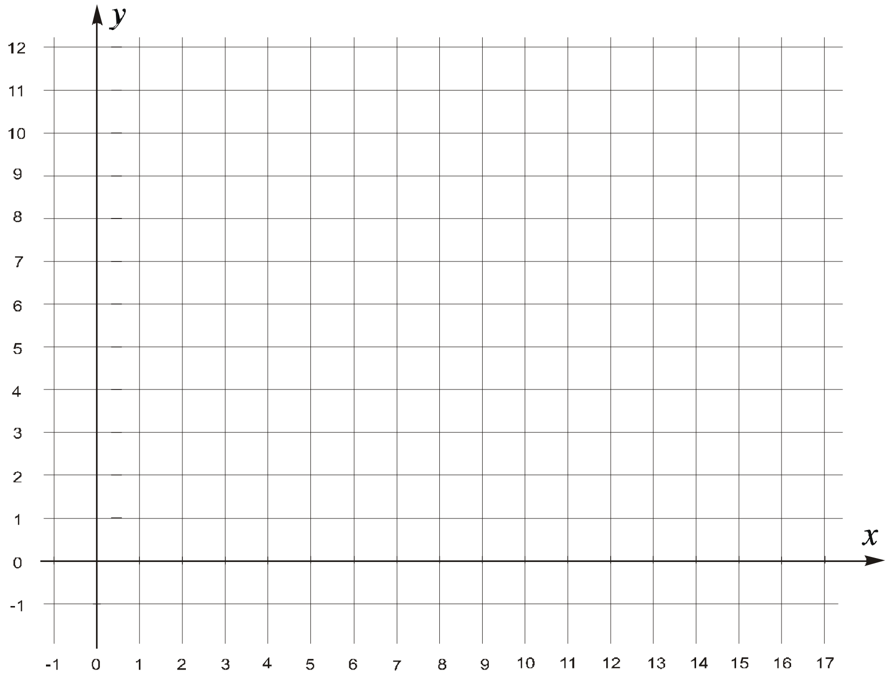
Gleichungssystem

$$\begin{array}{l|l|} \mathrm{I} & x - y = 1 \\ \mathrm{II} & \dfrac{x}{2} + 2y = 8 \end{array}$$

Nun bringt man jede Gleichung auf die Form: $y = \dots$

$$\begin{array}{l|l|} \mathrm{I} & \\ \mathrm{II} & \end{array}$$

Beide Gleichungen können nun als Funktionsgleichung einer Geraden aufgefasst werden.



Das Gleichungssystem lösen heisst: Man sucht diejenigen Zahlen x und y, welche beide Gleichungen erfüllen. Das heisst man sucht die Koordinaten derjenigen Punkte, welche auf beiden Geraden liegen. Dies sind die koordinaten des Schnittpuktes.

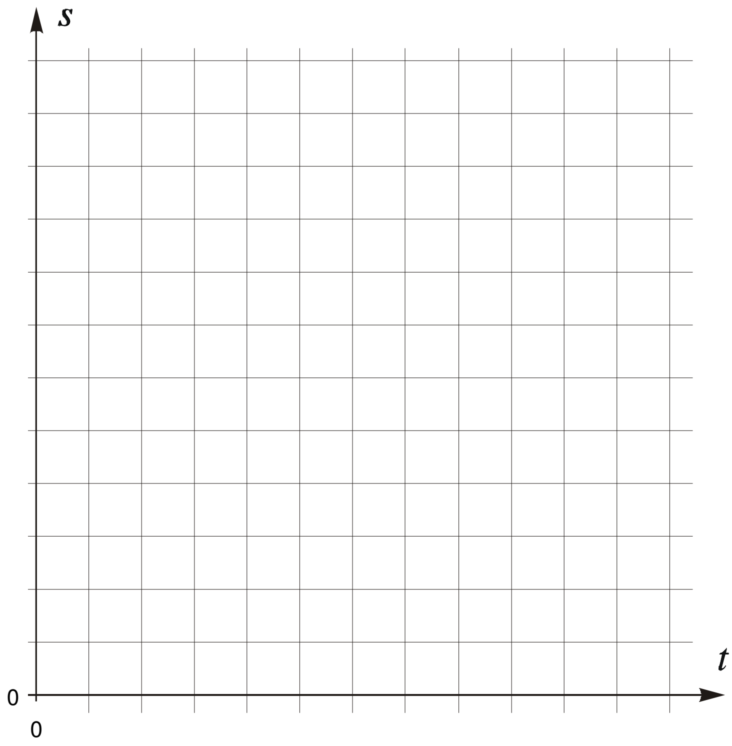
Bei der Lösungsfindung für die grafische Darstellung dern zwei Funktionen kann in den einzelnen Gleichungen hintereinander $x = 0$ und $y = 0$ gesetzt werden und somit die Funktion aufgezeichnet werden.

Beispiel 2

Ein Jogger A wohnt $30km$ von einem Jogger B entfernt.
Sie starten gleichzeitig und laufen einander entgegen mit den Geschwindigkeiten:

$v_A = 10\,km/h$
$v_B = 15\,km/h$

Wann und wo treffen sie sich?



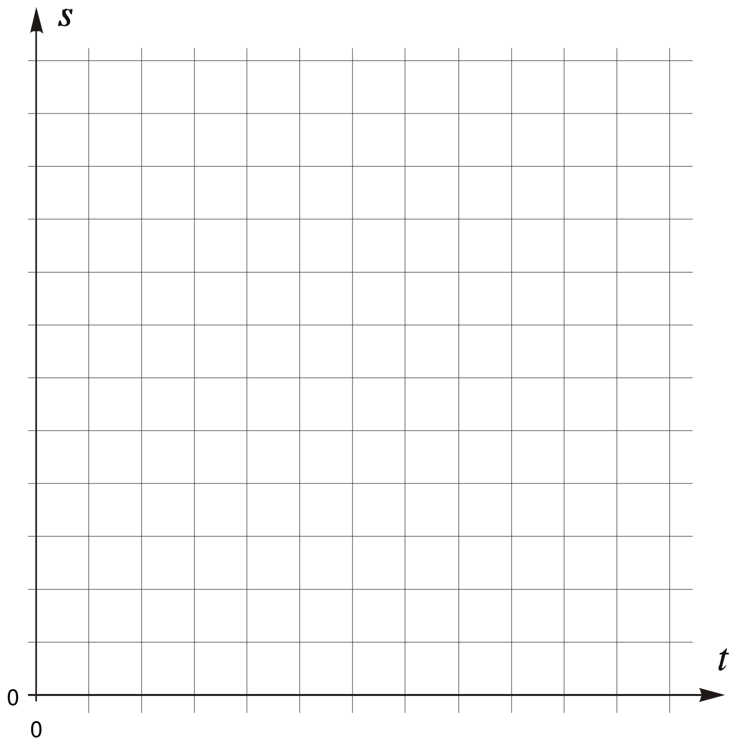
Wertetabelle
Damit die Beiden Grafen der zwei Jogger gezeichnet werden können, bedienen wir uns der Variante mit einer Wertetabelle.

Zeit t in $[h]$	1	2	3	4	5	6
Jogger A s in $[km]$						
Jogger B s in $[km]$						

Beispiel 3

Ein Motorradfahrer A startet in Buchs Richtung Bern mit einer Geschwindigkeit $v_A = 60\,km/h$. Ein Motorradfahrer B startet eine halbe Stunde später in Buchs ebenfalls Richtung Bern mit einer Geschwindigkeit $v_B = 100\,km/h$.

Wann und wo holt B den Motorradfahrer A ein?



Wertetabelle

Damit die Beiden Grafen der zwei Motorradfahrer gezeichnet werden können, bedienen wir uns der Variante mit einer Wertetabelle.

Zeit t in $[h]$	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Motorrad A s in $[km]$						
Motorrad B s in $[km]$						

3.9.4.2 Spezielle Gleichungssysteme

Beispiel 1

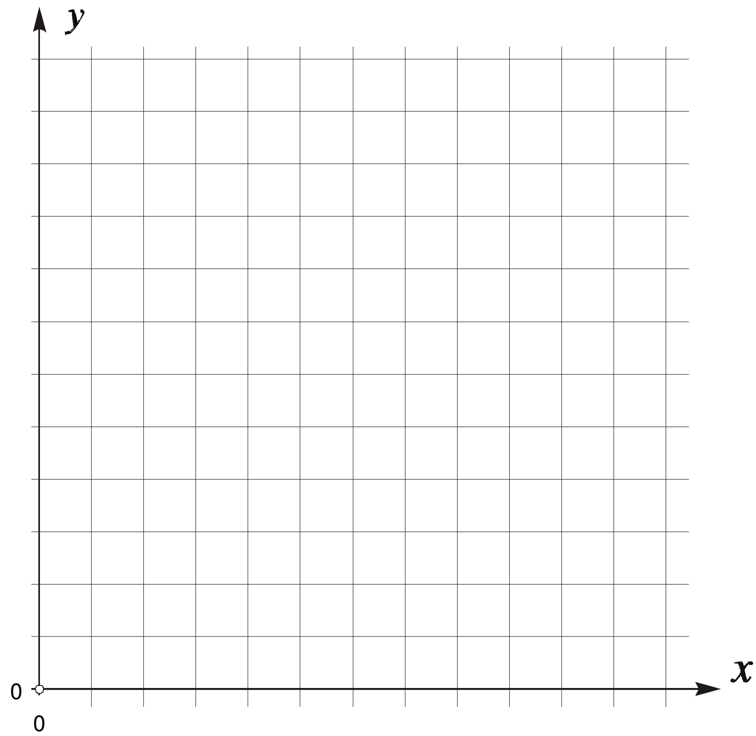
Gleichungssystem

$$\begin{array}{c|c|} \mathrm{I} & 3x+4y=6 \\ \mathrm{II} & 6x+8y=12 \end{array}$$

Nun bringt man jede Gleichung auf die Form: $y=...$

$$\begin{array}{c|c|} \mathrm{I} & \qquad\qquad \\ \mathrm{II} & \end{array}$$

Die beiden Geraden sind identisch. Es gibt unendlich viele Schnittpunkte. Jeder Punkt auf der Geraden liefert eine Lösung des Gleichungssystems. Dieser Fall tritt ein, wenn eine Gleichung ein Vielfaches der anderen ist.



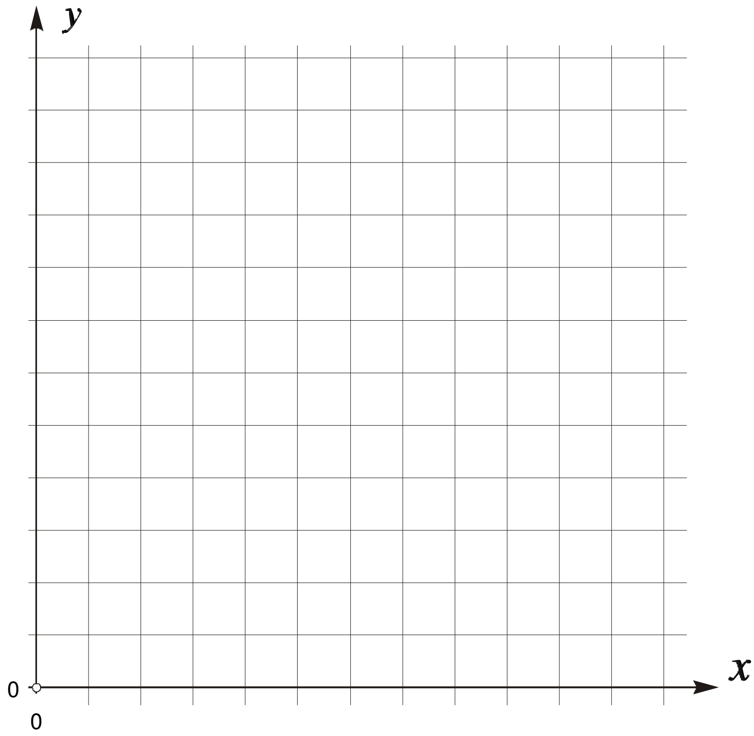
Beispiel 2

Gleichungssystem

$$\begin{array}{l|l|} \mathrm{I} & 4x+2y=6 \\ \mathrm{II} & 4x+2y=8 \end{array}$$

Nun bringt man jede Gleichung auf die Form: $y=\ldots$

$$\begin{array}{l|l|} \mathrm{I} & \\ \mathrm{II} & \end{array}$$



Die beiden Geraden haben die gleiche Steigung, aber einen verschidenen y -Achsenversatz, sie sind somit parallel. Die Geraden schneiden sich nicht, das Gleichungssystem hat keine Lösung.

3.9.5 Quadratische Funktionen

3.9.6 Grafische Lösung eines quadratischen Gleichungssystems